UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

12

SISTEMA DE E.D DE COEFICIENTES CONSTANTES

Sean un sistema de "n" ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las funciones incógnitas $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$, $\cdots$, $x_n = x_n(t)$
Tiene la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Notación vectorial:

Si llamamos a $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ $\quad f = (f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n)$

Sistema de E.D. en forma Vectorial $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)}$

Donde los $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$, $\cdots$, $x_n = x_n(t)$ son funciones diferenciables y con derivadas continuas en $I = (a, b)$, llamadas solución del sistema.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Forma normal:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dx_i}{dy} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i(t) + f_i(t)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Supondremos que los coeficientes $a_{ij}(t)$ y las funciones $b_i(t)$ son **continuas en un intervalo *I***. Si todas las $f_i(t)$ son cero diremos que el **sistema lineal** es **homogéneo**.

Si los $a_{ij}(t)$ son constantes el sistema se denomina "**Sistema de Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.**

Ejemplos

$$\frac{dx}{dt}=3x+4y \qquad \frac{dy}{dt}=5x-7y$$

Sistema E.D. 1er. Orden con coeficientes constantes homogéneo

$$\frac{dx}{dt}=6x+y+z+t \qquad \frac{dy}{dt}=8x+7y-z+10t \qquad \frac{dz}{dt}=2x+9y-z+6t$$

Sistema E.D. 1er. Orden con coeficientes constantes no homogéneo

REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUCIONES DIFERENCIALES DE 1ER ORDEN.

Si llamamos $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

El sistema ecuaciones diferenciales expresado en forma matricial será

$$\boxed{\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{F}}$$

El sistema homogéneo asociado será: $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$

Sea el sistema de E.D. **E.D. Matricialmente**

$$\frac{dx}{dt}=3x+4y \qquad \frac{dy}{dt}=5x-7y \quad , \quad \text{Si} \quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

E.D. Matricialmente

$$\frac{dx}{dt}=6x+y+z+t \qquad \frac{dy}{dt}=8x+7y-z+10t \qquad \frac{dz}{dt}=2x+9y-z+6t \quad , \quad \text{Si } \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix} t \\ 10t \\ 6t \end{pmatrix}$$

METODOS DE SOLUCIÓN SISTEMA DE E.D. DE 1ER ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Existen dos maneras:

a) Reducción del Sistema de Ecuaciones Dif a una E.D. de n-ésimo orden.
b) Método Matricial

<u>Reducción del Sistema de Ecuaciones Dif a una E.D. de 2do orden.</u>

Ejemplo:
Sea el sistema de Ec. Diferenciales de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax+by+f(t) & \cdots(I) \\ \dfrac{dy}{dt}=mx+ny+g(t) & \cdots(II) \end{cases}$$

Donde: a,b,m,n son constantes
$f(t),g(t)$ son funciones conocidas
$x(t),y(x)$ son funciones incógnitas.

Resolución:

Paso 1. Despejamos en (I) la variable y : $y=\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)$

Paso 2 Reemplazando lo anterior en (II)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)\right]=mx+n\left[\frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)\right]+g(t)$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{d^2x}{dt^2}-a\frac{dx}{dt}-\frac{d\,f(t)}{dt}\right)=mx+\frac{n}{b}\left(\frac{dx}{dt}-ax-f(t)\right)+g(t)$$

$$\frac{1}{b}\frac{d^2x}{dt^2}-\left(a+\frac{n}{b}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{a\,n}{b}-m\right)x=g(t)-\frac{n}{b}f(t)+\frac{1}{b}\frac{d}{dt}f(t)$$

Si llamamos $A=\frac{1}{b}$, $B=-\left(a+\frac{n}{b}\right)$, $C=\left(\frac{a\,n}{b}-m\right)$ y $R(t)=g(t)-\frac{n}{b}f(t)+\frac{1}{b}\frac{d}{dt}f(t)$

Se tiene: $\boxed{A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx=R(t)}$ Se convierte en una E.D. de 2do. Orden para x .

Lo mismo se hace para calcular la solución para la función y .

Ejemplo:

Resolver:

a) $$\frac{dx}{dt}=3x+4y \qquad \frac{dy}{dt}=2x-3y$$

b) $$\frac{dx}{dt}=2x-y \qquad \frac{dy}{dt}=9x+2y$$

c) $$\frac{dx}{dt}=x-y+t \qquad x(0)=-\frac{7}{9}$$
$$\frac{dy}{dt}=x-2y+2t \qquad y(0)=-\frac{5}{9}$$

d) $$\frac{dx}{dt}=x-3y+e^t \qquad \frac{dy}{dt}=2y+e^{-t}$$

DEFINICIÓN

Vector solución

Un **vector solución** en un intervalo *I* es cualquier vector columna

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen el sistema de EDOs en el intervalo *I*.

Ejemplo

Comprueba que en $(-\infty,\infty)$

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}e^{6t}=\begin{pmatrix}3e^{6t}\\5e^{6t}\end{pmatrix}$$

Son soluciones de $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\mathbf{X}$

Solución

De $\mathbf{X}_1'=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}_2'=\begin{pmatrix}18e^{6t}\\30e^{6t}\end{pmatrix}$

Tenemos

$$\mathbf{AX}_1=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2t}-3e^{-2t}\\5e^{-2t}-3e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{pmatrix}=\mathbf{X}_1'$$

$$\mathbf{AX}_2=\begin{pmatrix}1&3\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{6t}\\5e^{6t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{6t}+15e^{6t}\\15e^{6t}+15e^{6t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18e^{6t}\\30e^{6t}\end{pmatrix}=\mathbf{X}_2'$$

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL (PVI)

Sea $\mathbf{X}(t_0)=\begin{pmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\\\vdots\\x_n(t_0)\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_0=\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_n\end{pmatrix}$

Resolver: $\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}+\mathbf{F}(t)$ sujeto a : $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$ es un **PVI**.

TEOREMA Existencia de una solución única

Sean las componentes de $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{F}(t)$ funciones continuas en un intervalo común *I* que contiene a t_o
Entonces podemos asegura que existe una solución única de nuestro sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$ en *I*.

TEOREMA Principio de superposición

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \cdots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de soluciones de un sistema homogéneo en *I*, entonces:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3 + \cdots + c_k\mathbf{X}_k$$

es también una solución en I .

Verificar que si:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -1/2 \cos t + 1/2 \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Son soluciones de: $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

Y que entonces: $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$

también es una solución. $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -1/2 \cos t + 1/2 \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$

TEOREMA Dependencia e independencia lineal

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \cdots, \mathbf{X}_k$ un conjunto de vectores solución de un sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ en un intervalo *I*. Se dice que el conjunto es ***linealmente dependiente*** en el intervalo si existen constantes $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$, no todas nulas, tales que

$$\mathbf{c}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{X}_3 + \cdots + \mathbf{c}_k\mathbf{X}_k = 0$$

para todo t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es **linealmente dependiente** en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

TEOREMA Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

n vectores solución de un **sistema homogéneo** $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ en el intervalo I . Entonces el conjunto de vectores solución es linealmente independiente en I si y sólo si, para todo t en el intervalo, el **wronskiano:**

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hemos visto que: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$

Son soluciones de: $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

Pues $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{vmatrix} = 8e^{4t} \neq 0$

$\mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2$ son soluciones linealmente independientes para todo t real.

Nota:

De hecho, se puede demostrar que si W es diferente de 0 en t_0 para un conjunto de soluciones en I , entonces lo es para todo t en I .

Definición Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \cdots, \mathbf{X}_n$ de n vectores solución linealmente independientes de un sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en un intervalo I, se dice que son un ***conjunto fundamental de soluciones*** en el intervalo.

TEOREMA Existencia de un conjunto fundamental

Siempre existe un conjunto fundamental de soluciones para un sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en un intervalo I.

TEOREMA Solución general de sistemas homogéneos

Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \cdots, \mathbf{X}_n$ un conjunto fundamental de soluciones de un ***sistema homogéneo*** $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en un intervalo I. Entonces la **solución general** del sistema en el intervalo es

$$\mathbf{X} = \mathbf{c}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{X}_3 + \cdots + \mathbf{c}_n\mathbf{X}_n$$

donde las c_i, i = 1, 2,…, n son constantes arbitrarias.

Hemos visto que

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \qquad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

son soluciones linealmente independientes de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

en (−∞, ∞).

De ahí que forman un conjunto fundamental de soluciones. Y entonces la **solución general** es:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Considera los vectores solución de: $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -1/2 \cos t + 1/2 \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \sin t \\ -1/2 \sin t - 1/2 \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Demuestra que son linealmente independientes y escribe una solución general:

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -1/2 \cos t + 1/2 \sin t & e^t & -1/2 \sin t - 1/2 \cos t \\ -\cos t - \sin t & 0 & -\sin t + \cos t \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -1/2 \cos t + 1/2 \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c^3 \begin{pmatrix} \sin t \\ -1/2 \sin t - 1/2 \cos t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

TEOREMA Solución general de sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{X}_P$ una solución particular dada de un sistema no homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ en el intervalo *I*, y sea $\mathbf{X}_C = \mathbf{c}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{c}_3\mathbf{X}_3 + \cdots + \mathbf{c}_n\mathbf{X}_n$ **solución general** en el mismo intervalo del sistema homogéneo asociado.
Entonces, la **solución general** del sistema ***no homogéneo*** $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ en el intervalo es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_C + \mathbf{X}_P$$

La solución general $\mathbf{X}_C$ del sistema homogéneo se llama **función complementaria** del sistema no homogéneo.

El vector $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$

es una solución particular de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix}$

en (−∞, ∞). Vimos que la solución de $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ es: $\mathbf{X}_c = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$

Así la **solución general del sistema no homogéneo** en (−∞, ∞) es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_c + \mathbf{X}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN MATRICIAL PARA SISTEMA DE E.D. PRIMER ORDEN HOMOGENEO CON COEFICIENTES CONSTANTES

Veamos el caso de 3 ecuaciones:

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad \cdots(I)$$

Si llamamos Donde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ y $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

El sistema anterior lo podemos escribir como: $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1e^{\lambda t} \\ k_2e^{\lambda t} \\ k_3e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \cdots(II)$$

Es decir: $x_1(t) = k_1e^{\lambda t}$, $x_2(t) = k_2e^{\lambda t}$, $x_3(t) = k_3e^{\lambda t}$

Derivando con respecto a t , cada las anteriores soluciones tenemos, respectivamente

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda\, k_1\, e^{\lambda t} \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda\, k_2\, e^{\lambda t} \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = \lambda\, k_2\, e^{\lambda t}$$

Reemplazando, los resultados anteriores en el sistema (I)

$$\begin{cases} \lambda\, k_1 e^{\lambda t} = a_{11}k_1e^{\lambda t} + a_{12}k_2e^{\lambda t} + a_{13}k_3e^{\lambda t} \\ \lambda\, k_2\, e^{\lambda t} = a_{21}\, k_1\, e^{\lambda t} + a_{22}\, k_2\, e^{\lambda t} + a_{23}\, k_3\, e^{\lambda t} \\ \lambda\, k_3\, e^{\lambda t} = a_{31}\, k_1\, e^{\lambda t} + a_{32}\, k_2\, e^{\lambda t} + a_{33}\, k_3\, e^{\lambda t} \end{cases}$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, es decir podemos simplificarlo en el sistema anterior y se obtiene:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\, k_1 = a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 \\ \lambda\, k_2 = a_{21}\, k_1 + a_{22}\, k_2 + a_{23}\, k_3 \\ \lambda\, k_3 = a_{31}\, k_1 + a_{32}\, k_2 + a_{33}\, k_3 \end{cases}$$

Lo que es lo mismo
$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0 \\ a_{21}\, k_1 + (a_{22} - \lambda)\, k_2 + a_{23}\, k_3 = 0 \\ a_{31}\, k_1 + a_{32}\, k_2 + (a_{33} - \lambda)\, k_3 = 0 \end{cases} \quad \cdots(III)$$

Para que el sistema homogéneo anterior (III) no tenga una solución trivial, se debe cumplir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al polinomio $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ se le denomina el polinomio característico del sistema.

- La raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ son los **valores propios** del sistema.
- Cada valor propio $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ **son distintos**, reemplazado en (III) según (II) , nos determinará **vectores propios** $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ y a las soluciones $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t}, \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}, \mathbf{X}_3 = \mathbf{K}_3e^{\lambda_3 t}$
- Lo que al final nos conducirá a la **solución general** del sistema como:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + c_3\mathbf{X}_3$$

Lo que es lo mismo:
$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{K}_3e^{\lambda_3 t}$$

En general, Si suponemos que la solución para un sistema lineal homogéneo de primer orden $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, tiene la forma $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ entonces, como $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda\, e^{\lambda t}$,sustituyendo en el sistema de EDOs: $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, tenemos $\mathbf{K}\lambda\, e^{\lambda t} = \mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\lambda\, e^{\lambda t}$.

De donde: $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. Es decir: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$

O equivalentemente:

$$\begin{matrix} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + & a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + & a_{2n}k_n = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + & (a_{nn} - \lambda)k_n = 0 \end{matrix}$$

Y recordemos que si existe una solución no trivial $\mathbf{X}$, debe cumplirse entonces que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

VALORES PROPIOS (autovalores) y VECTORES PROPIOS (autovectores)

AUTOVALORES REALES Y DISTINTOS

TEOREMA Solución general para sistemas homogéneos

Sean $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ n valores propios reales y **distintos** de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de un sistema homogéneo $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$, y sean $\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2,\mathbf{K}_3,\cdots,\mathbf{K}_n$ los **autovectores** correspondientes. La solución general del sistema es entonces:

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}+\cdots c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$$

Ejemplo:

Resolver
$$\frac{dx}{dt}=2x+3y$$
$$\frac{dy}{dt}=2x+y$$

Estableciendo el sistema:

$$\begin{cases}(2-\lambda)k_1 + 3k_2 = 0\\ 2k_1 + (1-\lambda)k_2 = 0\end{cases}$$

De aquí:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1=-1 \quad , \lambda_2=4$

Si $\boxed{\lambda_1=-1}$ en el sistema: $\begin{matrix}3k_1 + 3k_2 = 0\\ 2k_1 + 2k_2 = 0\end{matrix}$. Así $k_1=-k_2$

Tomando: $k_2=-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Si $\boxed{\lambda_1=4}$ en el sistema : $\begin{matrix}-2k_1 + 3k_2 = 0\\ 2k_1 - 3k_2 = 0\end{matrix}$. Así $k_1=\dfrac{3k_2}{2}$

Escogiendo $k_2=2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Por lo tanto, ***la solución general*** es: $\mathbf{X}=c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{4t}$

Ejemplo

Resolver

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x+y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+5y-z,\\ \dfrac{dz}{dt}=y-3z\end{cases}$$

Solución:

Estableciendo el sistema:
$$\begin{cases}-(4+\lambda)k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+(5-\lambda)k_2-k_3=0\\ 0k_1+k_2-(3+\lambda)k_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 5-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5)=0$$

Resolviendo: $\lambda=-3,\ -4,\ 5$

Si $\boxed{\lambda=-3}$ se tiene en el sistema: $\begin{cases}-k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+8k_2-k_3=0\\ 0k_1+k_2+0k_3=0\end{cases}$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$[\mathbf{A}+3\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}]=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 8 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Se tiene de lo anterior: $k_1=k_3$ y $k_2=0$,

Escogiendo: $k_1=k_3=1$, tenemos:

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$$

Si $\boxed{\lambda_2=-4}$ tenemos : $\begin{cases}0k_1+k_2+k_3=0\\ k_1+9k_2-k_3=0\\ 0k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$

Resolviendo por Gauss-Jordan:

$$[\mathbf{A}+4\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}]=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\1&9&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-10&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Se tiene de lo anterior: $k_1=10k_3$ y $k_2=-k_3$,

Escogiendo: $k_3=1$, tenemos: $k_1=10$ y $k_2=-1$

$$\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-4t}$$

Si $\boxed{\lambda_3=5}$ tenemos : $\begin{cases}-9k_1+k_2+k_3=0\\k_1+0k_2-k_3=0\\0k_1+k_2-8k_3=0\end{cases}$

Resolviendo por G-J:

$$[\mathbf{A}+5\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}]=\left(\begin{array}{ccc|c}-9&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&-8&0\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-8&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Entonces: $k_1=k_3$ y $k_2=8k_3$,

Escogiendo: $k_3=1$, tenemos: $k_1=1$ y $k_2=8$

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{X}_3=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}e^{5t}$$

Por lo tanto, la **solución general** es:

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+c_2\begin{pmatrix}10\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-4t}+c_3\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}e^{5t}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

Resolver:

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Solución:

Considerando:

$$\begin{cases}(1-\lambda)k_1-2k_2+2k_3=0\\-2k_1+(1-\lambda)k_2-2k_3=0\\2k_1-2k_2+(1-\lambda)k_3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&1-\lambda&-2\\2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ $-(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$ entonces: $\lambda_1=\lambda_2=-1$; $\lambda_3=5$

Si $\boxed{\lambda_1=-1}$ **(multiplicidad m = 2)** en el sistema:

$$\begin{cases}2k_1-2k_2+2k_3=0\\-2k_1+2k_2-2k_3=0\\2k_1-2k_2+2k_3=0\end{cases}$$

Resolviendo por matrices, método de Gauss-Jordan:

$$[\mathbf{A}+\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}]=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&2&0\\-2&2&-2&0\\2&-2&2&0\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$k_1-k_2+k_3=0$ o $k_1=k_2-k_3$

Escogiendo: $k_2=1$, $k_3=0$ $\Rightarrow$ $k_1=1$

y $k_2=1$, $k_3=1$ $\Rightarrow$ $k_1=0$

En consecuencia: $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}$

Si $\boxed{\lambda_3=5}$ en el sistema: $\begin{cases}-4k_1-2k_2+2k_3=0\\-2k_1-4k_2-2k_3=0\\2k_1-2k_2-4k_3=0\end{cases}$

Resolviendo por matrices, método de Gauss-Jordan:

$$[\mathbf{A}-5\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}]=\left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -2 & 2 & 0\\ -2 & -4 & -2 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

De lo anterior se tiene: $k_1 = k_3$ y $k_2 = -k_3$

Eligiendo: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, así: $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Es decir: $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{5t}$

En consecuencia, la solución general es:

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{5t}$$

NOTA IMPORTANTE

Observa que en este ejemplo que la matriz A es simétrica y real, entonces se puede demostrar que siempre es posible encontrar n autovectores linealmente independientes.

SEGUNDA SOLUCIÓN

PROPOSICIÓN

Sea el sistema homogéneo $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

Supongamos que λ_1 es de multiplicidad 2 y que solo hay un autovector relacionado con este autovalor,

Entonces, La segunda solución $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$

Donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{P}$ se obtienen resolviendo :

$$\begin{cases}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}\\ (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}\end{cases}$$

Demostración:

Para obtener una **segunda solución** se puede construir de la forma sustituyendo la solución $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$ en $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ se tiene:

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{K}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{P}e^{\lambda_1 t}\right)' - \mathbf{A}\left(\mathbf{K}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{P}e^{\lambda_1 t}\right)=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{K}e^{\lambda_1 t}+\mathbf{K}\lambda_1 te^{\lambda_1 t}+\mathbf{P}\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right)+\left(\mathbf{AK}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{AP}e^{\lambda_1 t}\right)=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{AK}-\lambda_1\mathbf{K})}_{(I)}te^{\lambda_1 t}+\underbrace{(\mathbf{AP}-\lambda_1\mathbf{P}-\mathbf{K})}_{(II)}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{0}$$

De (I) y (II) Se establece
$$\begin{cases}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}\\ (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P}=\mathbf{K}\end{cases}$$

Ejemplo: Resolver

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Solución:

Establecemos el sistema: $\begin{cases} (3-\lambda)k_1 - \quad 18\ k_2 = 0 \\ \quad 2\ k_1 - (9+\lambda)k_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\ \mathbf{I}) = 0$

$\Rightarrow \quad -(3-\lambda)(9+\lambda) - (2)(-18) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + +6\lambda - 27 + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

Se tiene: $(\lambda+3)^2 = 0$, $\lambda = -3, -3$

<u>Solo obtenemos un autovector:</u>

Pues del sistema $\begin{cases} 6k_1 - 18\ k_2 = 0 \\ 2k_1 - \ 6\ k_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3k_2$

Si escogemos: $k_2 = 1$ tenemos: $k_1 = 3$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

<u>Para obtener la segunda solución</u>, definamos: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

Donde consideramos: $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$

Considerando de la ecuación obtenida: $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases}$

Resolviendo lo anterior se tiene: $p_2 = \frac{1}{3}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right)$

Si elegimos $p_1 = 1$, entonces $p_2 = \frac{1}{6}$, es así que: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/6 \end{pmatrix}$

Por lo tanto la segunda solución es: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/6 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Pero, Si elegimos $p_1 = \frac{1}{2}$, entonces $p_2 = 0$, y la solución es más "simple": $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es así que: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Podemos escribir **la solución general** como: $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$

AUTOVALORES DE MULTIPLICIDAD 3

Si de nuevo disponemos solamente de un autovector, hallamos la segunda solución como antes, y la tercera de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}$$

Donde $\mathbf{K}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$

están definidas por:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$$

Ejercicio: Demostrarlo!

Ejemplo:

Resolver $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

Solución:

$(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ **(multiplicidad 3).**

Resolviendo $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$, tenemos un único vector propio $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

A continuación resolvemos:

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}$$

Resolviendo los siguientes sistemas:.

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\ \mathbf{P} = \mathbf{K} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{Q}=\mathbf{P} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, **la solución general** es:

$$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right]+c_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

AUTOVALOR DE MULTIPLICIDAD *M*

Si sólo disponemos de un autovector para un autovalor de multiplicidad *m*, siempre podemos encontrar *m* soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\mathbf{X}_1=\mathbf{K}_{11}e^{\lambda t}$$
$$\mathbf{X}_2=\mathbf{K}_{21}te^{\lambda t}+\mathbf{K}_{22}e^{\lambda t}$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{X}_m=\mathbf{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}+\mathbf{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t}+\ldots+\mathbf{K}_{mm}e^{\lambda t}$$

Donde los **K**'s son vectores columnas que podemos determinar generalizando el método expuesto.

AUTOVALORES COMPLEJOS

TEOREMA Soluciones correspondientes a un autovalor complejo

Sea $\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes con elementos reales de un sistema homogéneo, y sea $\mathbf{K}_1$ un **autovector** correspondiente al **autovalor complejo** $\lambda_1=\alpha+i\beta$.

Entonces $\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ $\quad \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$ son soluciones.

TEOREMA Soluciones reales asociadas a un autovalor complejo

Sea $\lambda_1=\alpha+i\beta$ un valor propio complejo de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de un sistema homogéneo, $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$ y sean $\boxed{\mathbf{B}_1=\mathrm{Re}(\mathbf{K}_1)}$ y $\boxed{\mathbf{B}_2=\mathrm{Im}(\mathbf{K}_2)}$.

Entonces podemos escribir la solución como:

$$\mathbf{X}_1=[\mathbf{B}_1\cos\beta t-\mathbf{B}_2\sin\beta t]\,e^{\alpha t}$$
$$\mathbf{X}_2=[\mathbf{B}_2\cos\beta t+\mathbf{B}_1\sin\beta t]\,e^{\alpha t}$$

soluciones linealmente independientes en (-∞,∞).

(Demuéstralo).

NOTA: Si queremos escribir las soluciones en términos de funciones reales, basta con emplear:

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t)\right)$$
$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)-i\sin(\beta t)\right)$$

Ejemplo:

Resolver $\quad \mathbf{X}'=\begin{pmatrix}2&8\\-1&-2\end{pmatrix}\mathbf{X}$, $\quad \mathbf{X}(0)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Solución:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}2-\lambda&8\\-1&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4=0$$

Si $\boxed{\lambda_1=2i}$ En el sistema:

$$\begin{aligned}(2-2i)k_1+\quad 8\,k_2&=0\\-k_1+(-2-2i)k_2&=0\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos: $k_1=-(2+2i)k_2$

Si escogemos $k_2=-1$ $\quad \mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}2+2i\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

De lo anterior: $\quad \mathbf{B}_1=\mathrm{Re}(\mathbf{K}_1)=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}_2=\mathrm{Im}(\mathbf{K}_1)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

En consecuencia **la solución general** es:

$$\mathbf{X}=c_1\left[\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right]+c_2\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\sin 2t\right]$$

Por lo tanto: $$\mathbf{X}=c_1\begin{pmatrix}2\cos 2t-2\sin 2t\\-\cos 2t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\cos 2t+2\sin 2t\\-\sin 2t\end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN POR DIAGONALIZACIÓN

NOTA:

Si $\mathbf{A}$ es ***diagonalizable***, entonces existe $\mathbf{P}$, tal que: $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ es diagonal.

Si $\mathbf{A}$ es ***diagonalizable*** y realizamos el cambio matricial $\mathbf{X}=\mathbf{PY}$, el sistema de ecuaciones $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$ se transforma en $\mathbf{PY}'=\mathbf{APY}$. Y multiplicando por la izquierda por $\mathbf{P}^{-1}$, tenemos: $\mathbf{Y}'=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APY}$, es decir: $\mathbf{Y}'=\mathbf{DY}$, cuya solución es directa e igual a:

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}\\c_2e^{\lambda_2 t}\\\vdots\\c_ne^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$$

Deshaciendo el cambio, $\mathbf{X}=\mathbf{PY}$, encontramos la solución buscada.

Ejemplo:

Resolver $$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-2&-1&8\\0&-3&8\\0&-4&9\end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Solución

Como: $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&8\\0&-3&8\\0&-4&9\end{pmatrix}$$

De $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \Rightarrow -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-5)=0$, obtenemos

$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ y $\lambda_3=5$. Puesto que son autovalores reales y distintos, los vectores propios son linealmente independientes. Para i = 1, 2, 3, resolvemos $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{K}=0$, y tenemos

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Sabemos que $\mathbf{P}=[\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3]$ Teniendo: $$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Caculando $\mathbf{P}^{-1}$, se tiene que: $$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

Calculando $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ $\Rightarrow$ $$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{Y}'=\mathbf{DY}$, entonces $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$

Por lo tanto:: $$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}c_1e^{-2t}\\c_2e^{t}\\c_3e^{5t}\end{pmatrix}$$

Calculando la **solución general**, se tiene: $\mathbf{X}=\mathbf{PY}$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^{-2t}\\c_2e^{t}\\c_3e^{5t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{-2t}+2c_2e^{t}+c_3e^{5t}\\2c_2e^{t}+c_3e^{5t}\\c_2e^{t}+c_3e^{5t}\end{pmatrix}$$

SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS
(Resolución por coeficientes indeterminados)

Ejemplo:

Resolver

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{en } (-\infty,\infty)$$

Solución

Primero resolvemos el sistema homogéneo asociado: $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda = i, -i,$

$$\mathbf{X}_c = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Puesto que $\mathbf{F}(t)$ es un vector columna constante, podemos suponer una solución particular de la forma: $\mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ $a_1,\ b_1$ constantes

Aplicando en la ecuación diferencial, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= -a_1 + 2b_1 - 8 \\ 0 &= -a_1 + b_1 + 3 \end{aligned}$$

Resolviendo $a_1 = 14$, $b_1 = 11$

En consecuencia una solución particular es: $\mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

Y la solución final será: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_C + \mathbf{X}_P$

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Resolver:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}, \quad \text{en } (-\infty,\infty)$$

Solución

Resolvemos primero, el sistema homogéneo asociado: $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ $\Rightarrow \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, la solución complementaria: $\mathbf{X}_C = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}$

Calculando ***solución particular***, considerando que la expresión polinomio lineal:

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la ecuación $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$:

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Se establecen, los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 6a_2 + b_2 + 6 = 0 \\ 6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \\ 4a_2 + 3b_2 - 10 = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\tfrac{4}{7},\ b_1 = \tfrac{10}{7} \quad \text{y} \quad a_2 = -2,\ b_2 = 6$$

Por lo tanto: $\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$

La solución general del sistema en $(-\infty, \infty)$ es: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_C + \mathbf{X}_P$

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{7} \\ \dfrac{10}{7} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Determina la forma de $\mathbf{X}_P$ para:

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 3y - 2e^{-t} + 1$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + y + e^{-t} - 5t + 7$$

Solución

Como: $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Entonces, un posible candidato para la solución particular del sistema es:

$$\mathbf{X}_P = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Resuelve el sistema...

MATRIZ FUNDAMENTAL

Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ en I, su solución general es la combinación lineal:

$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + \ldots + c_n\mathbf{X}_n$,que también podemos escribir como:

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}$$

Que matricialmente podemos escribir como

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es el $n \times 1$ vector de constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$, y

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz fundamental*** del sistema.

Dos propiedades de la Matriz Fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$, fáciles de demostrar y que usaremos a continuación:

(i) Es regular (matriz no singular).
(ii) $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{\Phi}(t)$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

TEOREMA

Sea, ecuación: $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$

Entonces: $\mathbf{X}_C = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{C}$

$\mathbf{X}_P = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$ Donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es la ***matriz fundamental***

Luego, **la solución general** es:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$$

Demostración:

- De la ecuación diferencial homogénea asociada $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, por definición de matriz fundamental, se tiene: $\mathbf{X}_C = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{C}$

- Hallaremos una solución particular $\mathbf{X}_P$

Suponiendo: $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ tal que $\boxed{\mathbf{X}_P = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t)}$

Podemos calcular $\mathbf{X}'_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{U}(t)$

Como: $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A\Phi}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'_p = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t)$

Reemplazando los resultados anteriores en $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ obtenemos:

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{U}'(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}(t) = \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$$

Como $\mathbf{X}_P = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{U}(t)$, entonces $\mathbf{X}_p = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$

Y finalmente, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_C + \mathbf{X}_P$

Es decir: $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$

Ejemplo:

Determinar la solución general de $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\mathbf{X}+\begin{pmatrix}3t\\ e^{-t}\end{pmatrix}$, en $(-\infty, \infty)$.

Solución

Primero resolvemos el sistema homogéneo $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\mathbf{X}$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+5)=0$$

$\lambda=-2,\ -5$, y los vectores propios son $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Así, las soluciones son: $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\e^{-2t}\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-5t}=\begin{pmatrix}e^{-5t}\\-2e^{-5t}\end{pmatrix}$

Como: $\mathbf{\Phi}(t)=[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}$,

Calculando la matriz inversa: $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}\\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t}\end{pmatrix}$

En consecuencia

- $\mathbf{X}_C=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$
- $\mathbf{X}_P=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,dt$

$$\mathbf{X}_p=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}\\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3t\\e^{-t}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}2te^{2t}+\frac{1}{3}e^{t}\\ te^{5t}-\frac{1}{3}e^{4t}\end{pmatrix}dt$$

$$=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{t}\\ \frac{1}{5}te^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}-\frac{1}{12}e^{4t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t}\\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

Luego, **la solución general**, es

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{-5t}\\ e^{-2t} & -2e^{-5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t}\\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-5t}+\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}\frac{27}{50}\\ \frac{21}{50}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}e^{-t}$$

MATRIZ EXPONENCIAL

Podemos usar las matrices para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de una manera totalmente distinta.

Observemos que $x'=ax$ tiene como solución general $x=ce^{at}$.

¿Podemos definir una función exponencial matricial, de modo que $e^{At}C$ sea solución de $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$.

DEFINICIÓN Matriz Exponencial

Para cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $n\times n$, podemos definir

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}+\cdots$$

PROPOSICIÓN:

a) $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$

b) La matriz exponencial $\mathbf{X}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$ es una solución de $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$

En efecto,

Derivada de $e^{\mathbf{A}t}$

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\frac{d}{dt}\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+\mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!}+\cdots\right]=\mathbf{A}+\mathbf{A}^2t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2+\cdots=\mathbf{A}\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}}$$ L.q.q.d.

Además, si $\boxed{\mathbf{X}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}}$

$$\mathbf{X}'=\frac{d}{dt}[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}]=\frac{d}{dt}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{C}=(\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t})\mathbf{C}=\mathbf{A}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C})=\mathbf{AX}$$

Y efectivamente, $\mathbf{X}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$ es una solución de $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}$:

CÁLCULO DE $e^{\mathbf{A}t}$ EN POTENCIAS $\mathbf{A}^m$

Recuerda que vimos que podíamos calcular las potencias de una matriz $\mathbf{A}$, gracias a:

$$\mathbf{A}^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{A}^j, \qquad \lambda^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \lambda^j$$

donde los coeficientes c_j son los mismos para cada sumatorio y la última expresión es válida para los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ de $\mathbf{A}$. Poniendo $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ en la segunda expresión, obtenemos los c_j; que sustituidos en la primera expresión nos proporcionan las potencias de A para computar: $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}$

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{A}^j \quad , \quad \lambda^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \lambda^j}$$

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \quad , \quad e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!}}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(k) \mathbf{A}^j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_j(k) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j b_j(t)$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(k) \lambda^j \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_j(k) \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j b_j(t)$$

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) \mathbf{A}^j} \qquad \boxed{e^{\lambda t} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) \lambda^j}$$

Ejemplo:

Calcular $e^{\mathbf{A}t}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) \mathbf{A}^j \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{\mathbf{A}t} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{A}} \cdots (*)$$

$$e^{\lambda t} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(t) \lambda^j \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{\lambda t} = b_0 + b_1 \lambda} \cdots (**)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2+\lambda)(3-\lambda) - (-1)(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \ \text{ y } \ \lambda_2 = 2$$

Estableciendo en $(**)$:
$$\begin{aligned} e^{-t} &= b_0 - b_1 \\ e^{2t} &= b_0 + 2b_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{3}\left[e^{2t} + 2e^{-t} \right] \\ b_1 &= \frac{1}{3}\left[e^{2t} - e^{-t} \right] \end{aligned}$$

Remplazando en $(*)$, obtenemos:
$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} -1/3\, e^{2t} + 4/3\, e^{-t} & 4/3\, e^{2t} - 4/3\, e^{-t} \\ -1/3\, e^{2t} + 1/3\, e^{-t} & 4/3\, e^{2t} - 1/3\, e^{-t} \end{pmatrix}$$