UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

5

CAMBIOS DE VARIABLES

Hay algunas ecuaciones que no son exactas ni reducibles a exactas mediante factores integrantes sencillos (recordemos que las ecuaciones en variables separables exactas y las lineales son reducibles a exactas mediante un factor integrante que sólo depende de la variable independiente) En algunos casos, sin embargo, se puede reducir a ecuaciones exactas mediante un cambio de variable. Consideremos, por ejemplo, la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} \qquad \cdots(*)$$

Estas ecuación no es ni exacta ni reducible a exacta mediante un factor integrante que sólo depende de y o de x. No tenemos, entonces, un método para encontrar una expresión analítica de las soluciones.

Desde luego hay una solución de equilibrio $y(x)=0$, pero no sabemos cómo encontrar las demás soluciones. Al igual que se hace en el cálculo integral, se puede intentar la sustitución de la variable y por otra que aparezca adecuada como para que la ecuación se convierta en una de alguno de los tipos que ya sabemos resolver.

En este caso podemos intentar el cambio de variable: $h = \dfrac{y}{x}$ o equivalentemente, $y = hx$

Esto nos permite convertir la ecuación dada en una nueva ecuación en las variables h y x.

Ya que tenemos la expresión de y en función de h y de x; necesitamos además la expresión $\dfrac{dy}{dx}$.

Como $y = hx$, derivando (notar que como y es una función de x, y también lo es):

$$\frac{dy}{dx} = h + x\,\frac{dh}{dx}.$$

Sustituyendo en la ecuación dada en $(*)$

$$h + x\frac{dh}{dx} = xh - xh^2 + h$$

Que es equivalente a $$x\frac{dh}{dx} = xh - xh^2$$

Observamos que $x=0$ no pertenece al intervalo de integración de la ecuación $(*)$ porque aparece dividiendo.

Así pues podemos dividir por x y obtenemos la ecuación

$$\frac{dh}{dx} = h(1+h)$$

Que es una ecuación en variables separables que sabemos integrar. Las soluciones de equilibrio de esta ecuación son $h = 0$, $h = -1$.

Y la solución general es $h(x) = \dfrac{Ce^x}{1 - Ce^x}$ siendo C una constante arbitraria de cero.

Para hallar la solución de la ecuación dada $(*)$, debemos deshacer el cambio $y = hx$.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $y(t) = 0$, $y(x) = -x$ y $y(x) = \dfrac{Cxe^x}{1 - Ce^x}$

Siendo C una constante arbitraria distinta de cero.

Debe observarse que la solución $y(x) = 0$ se obtiene de la solución general haciendo $C = 0$, pero la $y(x) = -x$ no se obtiene de la solución general para ningún valor de C.

El problemas de encontrar una sustitución adecuada para poder obtener soluciones de una ecuación diferencial dada puede ser muy complicado, se requiere mucha práctica y, en ocasiones, una buena intuición. Hay, sin embargo, algunos tipos de ecuaciones para las que se puede dar, de forma general, la sustitución que es adecuada para reducirlas a ecuaciones lineales o en variables separables. Tal es el caso de las ecuaciones homogéneas y de Bernoulli que estudiaremos a continuación.

Estudiaremos en los ejercicios de este tema otros tipos de ecuaciones para las que un cambio de variables adecuado las reduce a ecuaciones de tipo conocido.

ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Comenzamos recordando que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es homogénea de orden n si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

En particular, se dice que f es homogénea si es homogénea de grado cero; es decir, si

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$$

Por ejemplo: $$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Es una función homogénea porque

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 (x^2 - y^2)}{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y)$$

Tenemos la siguiente definición:

Definición:

Una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \qquad \cdots (**)$$

, se dice que es homogénea si f es una función homogénea .

Debe observar que una caracterización alternativa de las funciones homogéneas es que f es homogénea si y sólo si f se puede escribir en la forma:

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

para alguna función g. Por ejemplo en el caso de más arriba

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por lo tanto si la ecuación $y' = f(x, y)$ es homogénea, podemos hacer el cambio de variable dependiente: $v = \dfrac{y}{x}$**,** de esta forma tendríamos que $y = xv$ y si derivamos teniendo en cuenta que v es una función de x, tendríamos: $y' = v + xv'$

Sustituyendo en $(**)$, y teniendo en cuenta que $f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)=g(v)$ por ser homogénea, obtenemos la ecuación diferencial $v+xv'=g(v)$ con x como variable independiente y v como variable dependiente. Esta ecuación es en variables separables.

En Efecto, la podemos escribir como sigue (siempre que $x\neq 0$:

$$v'=\frac{g(v)-v}{x}$$

Que es una ecuación en variables separadas. Para integrar esta ecuación procedemos como es habitual:

Para $g(v)-v\neq 0$ ponemos: $$\int\frac{1}{g(v)-v}dv=\int\frac{1}{x}dx+C$$

para obtener la solución general de la ecuación. Además todas los valores de v que hacen $g(v)-v=0$ serían soluciones de equilibrio. Para obtener las soluciones de la ecuación original se debe deshacer el cambio de variable.

Ejemplo 01:

Resuélvase la ecuación $x\,y'=\sqrt{x^2-y^2}+y \qquad \cdots(***)$.

Solución:

Podemos escribir la ecuación en la forma $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$

Quitando $x=0$ del intervalo de integración. Se trata de una ecuación homogénea por que si.

Entonces: $$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\sqrt{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}+(\lambda y)}{(\lambda x)}=\frac{\lambda\left(\sqrt{x^2-y^2}+y\right)}{\lambda x}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}=f(x,y)$$

Además $$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+y=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Haciendo la sustitución $y=vx$ tenemos $y'=v+xv'$ y la ecuación queda:

$$v+xv'=\sqrt{1-v^2}+v$$

O equivalentemente (recordando que $x=0$ no pertenece al intervalo de integración):

$$v'=\frac{\sqrt{1-v^2}}{x}$$

Que es una ecuación en variables separables. Las funciones $v(x)=1$ y $v(x)=-1$, son soluciones de equilibrio. Una vez consideradas, separamos las variables:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv=\frac{1}{x}dx$$

De donde podemos obtener la solución general de forma implícita:

$$\operatorname{arcsen} v(x)=\ln|x|+C$$

O explícitamente: $v(x)=\operatorname{sen}(\ln|x|+C)$

Ahora deshaciendo el cambio: $y(x)=x\operatorname{sen}(\ln|x|+C)$

que es la solución general de la ecuación $(***)$. No debemos olvidad las soluciones de equilibrio $v(x)=-1$ y $v(x)=1$. Éstas producen las soluciones $y(x)=-x$ y $y(x)=t$, respectivamente, de la ecuación $(***)$.

ECUACIONES DE BERNOULLI

Las ecuaciones de Bernoulli son las de la forma $\frac{dy}{dx} = p(x)y = r(x)y^{\alpha} \qquad \cdots(\Delta)$

Donde $\alpha \neq 0,1$ (si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ entonces la ecuación sería lineal, no homogénea en el primer caso y homogénea en el segundo).

En primer lugar $y(x) = 0$ es una solución de equilibrio y, por lo tanto, en lo sucesivo supondremos que $y \neq 0$.

Estas ecuaciones no son lineales pero se pueden reducir a lineales mediante una cambio de variable sencillo.

Como $y \neq 0$, podemos dividir ambas partes de la ecuación (Δ) por y^{α}.

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = r(x)$$

e intentamos el cambio $u = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$. Derivando:

$$u' = -\frac{(\alpha-1)y^{\alpha-2}y'}{y^{2\alpha-2}} = -\frac{(\alpha-1)y'}{y^{\alpha}}$$

Y por lo tanto: $\qquad \frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{du}{dx}$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{du}{dx} + (1-\alpha)\,p(x)u = (1-\alpha)r(x)$$

Que es una ecuación lineal no homogénea.

Ejemplo 02:

Resuélvase la ecuación

$$xy' + y = y^2 \ln x \qquad \cdots(\nabla)$$

Solución.- Dividiendo por x (nótese que debe ser $x > 0$ porque en caso contrario no tendría sentido $\ln x$) obtenemos una ecuación de Bernoulli:

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2\frac{\ln x}{x} \qquad \cdots(\nabla\nabla)$$

Dividimos por y^2: $\qquad \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = \frac{\ln x}{x}$

Hacemos el cambio de $u = \frac{1}{y}$. Así $u' = -\frac{y'}{y^2}$ $\qquad$ esto es: $\frac{y'}{y^2} = -u'$

Sustituyendo en la ecuación $(\nabla\nabla)$: $\quad -u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln x}{x}$

Y multiplicando por -1 conseguimos la ecuación lineal no homogénea: $\qquad u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}$

Que se resuelve como es habitual. El factor integrante es:

$F(t) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ $\qquad$ (recuérdese que $x > 0$)

Y la solución se obtiene de:

$$u(x)F(x) = -\int \frac{1}{x}\frac{\ln x}{x}dx + C = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx + C = \frac{\ln x + 1}{x} + C$$

De donde: $\quad u(x) = 1 + \ln x + Cx$

Deshaciendo el cambio $u = \frac{1}{x}$, tenemos que la solución general de la ecuación $(\nabla\nabla)$:

$$y(x) = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}$$

A estas solución hay que añadir la solución de equilibrio $y(x) = 0$ que, tal y como ya hemos visto, siempre es solución de cualquier ecuación de Bernoulli.

ECUACIONES HOMOGENEA

Definición:

Una Ecuación Diferencial homogénea que tiene la forma $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ donde $f\left(\frac{y}{x}\right)$ es una función homogénea de grado cero.

Observación:
Si la E.D. está dada por $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, entonces es una ecuación diferencial homogénea si $M(x,y)$ y $M(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

a) Resolviendo $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$,

Haciendo el cambio de variable: $\boxed{v=\frac{y}{x}}$ $\Rightarrow$ $y=vx$, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

Reemplazando y en la E.D. dada $v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$

$\Rightarrow$ $x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$ $\Rightarrow$ $\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}$

Integrando: $\int\frac{dv}{f(v)-v}=\int\frac{dx}{x}$

b) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

Haciendo la sustitución: $\boxed{v=\frac{y}{x}}$ $\Rightarrow$ $dy=v\,dx+xdv$

Reemplazando

$M(1,v)\;dx+N(1,v)\;(v\,dx+xdv)=0$ $\Rightarrow M(x,xv)\;dx+N(x,xv)\;(v\,dx+xdv)=0$

$\Rightarrow\; x\,M(1,v)\;dx+x\,N(1,v)\;(v\,dx+xdv)=0$ $\Rightarrow M(1,v)\;dx+N(1,v)\;(v\,dx+xdv)=0$

$\left[M(1,v)+v\,N(1,v)\right]dx+x\,N(1,v)\;dv=0$ E.D. de variables separables

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{x}+\frac{dv}{M(1,v)+v\,N(1,v)}=0$

Integrando: $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dv}{M(1,v)+v\,N(1,v)}=C$

Ejemplo 03:

Resolver: $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$

Solución:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$ Haciendo la Sustitución: $y=vx$, $v=\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

Reemplazando:

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v}$ $\Rightarrow$ $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v}-v$ $\Rightarrow$ $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v-v-v^2}{1+v}$

$\Rightarrow$ $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$ $\Rightarrow$ $\int\frac{(1+v)\,dv}{1-2v-v^2}=\int\frac{dx}{x}$

Haciendo: $\boxed{u=1-2v-v^2}$ $\Rightarrow$ $du=(-2-2v)\,dv\Rightarrow$ $\frac{du}{-2}=(1+v)\,dv$

$\int\frac{du}{-2\,u}=\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C$

$\ln(1-2v-v^2)^{-1/2}=\ln(Cx)$ $\Rightarrow$ $(1-2v-v^2)^{-1/2}=Cx$

$\left[1-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{-1/2}=Cx$ Solución general de la E.D.Homogenea.

Ejercicio 04:

Resolver:
$(x^3+y^3)\,dx - x\,y^2 dy = 0$ Condición inicial $y(1)=0$

Solución:
1RA FORMA:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{xy^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Haciendo el cambio de variable: $\boxed{v=\frac{y}{x}}$, $y=vx$, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^3}{v^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^3}{v^2}-v \Rightarrow v^2dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int v^2dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{v^3}{3}=\ln x+\ln C \Rightarrow v^3=3\ln(Cx) \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3=3\ln(Cx)$$

$\Rightarrow \boxed{y^3=3\,x^3\ln(Cx)}$ Solución general de la E.D.

2DA FORMA: $(x^3+y^3)\,dx - x\,y^2dy=0$

$y=vx$, $dy=v\,dx+x\,dv$

$$\Rightarrow (x^3+y^3)\,dx-xy^2(v\,dx+x\,dv)=0 \quad\Rightarrow\quad (x^3+(xv)^3)\,dx-x(xv)^2(v\,dx+x\,dv)=0$$

$$\Rightarrow (x^3+(xv)^3)\,dx-x^3v^2(v\,dx+x\,dv)=0 \quad\Rightarrow\quad x^3(1+v^3)\,dx-x^3v^2(v\,dx+x\,dv)=0$$

$$\Rightarrow (1+v^3)\,dx-v^2(v\,dx+x\,dv)=0 \quad\Rightarrow\quad (1+v^3-v^3)\,dx-xv^2dv=0$$

$$\Rightarrow dx-xv^2dv=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}=v^2dv$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x}-\int v^2dv=0 \quad\Rightarrow\quad \ln x-\frac{v^3}{3}=-\ln C$$

$$\Rightarrow \frac{v^3}{3}=\ln x+\ln C \quad\Rightarrow\quad v^3=3\ln Cx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3=3\ln Cx \quad\Rightarrow\quad y^3=3x^3\ln Cx$$

Ejercicio 05:

Resolver $\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}$

Solución:

La E.D. lo podemos escribir como: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$

Haciendo el cambio de variable: $\boxed{v=\frac{y}{x}}$ $\Rightarrow$ $y=vx$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

Reemplazando:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x} \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=1+v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=1 \Rightarrow dv=\frac{dx}{x}$$

Integrando: $\int dv=\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $v=\ln x+\ln C$ $\Rightarrow$ $v=\ln(Cx)$

Volviendo del cambio de variable: $\frac{y}{x}=\ln(Cx)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=x\ln(Cx)}$

ECUACIÓN DIFERENCIAL REDUCIBLES A HOMOGENAS

Definición

Una E.D. reducible a una E.D. homogénea tiene la forma:

$$\boxed{(ax+by+c)dx+(a_1x+b_1y+c_1)dy=0} \quad \cdots(*)$$

Donde: $L_1:\ ax+by+c=0$

$L_2:\ a_1x+b_1y+c_1=0$

Método de Solución:
Para resolver la E.D. se realizan las siguientes sustituciones:

$$u=ax+by+c \quad \Rightarrow \quad du=a\,dx+b\,dy$$
$$v=a_1x+b_1y+c_1 \quad \Rightarrow \quad dv=a_1dx+b_1dy$$

Por la ley de Cramer:

$$dx=\frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}=\frac{b_1\,du-b\,dv}{a\,b_1-b\,a_1} \quad \text{e} \quad dy=\frac{\begin{vmatrix} a & du \\ a_1 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}=\frac{a\,dv-a_1\,du}{a\,b_1-b\,a_1}$$

Luego, reemplazando en $(*)$:

$$u\left(\frac{b_1\,du-b\,dv}{a\,b_1-b\,a_1}\right)+v\left(\frac{a\,dv-a_1\,du}{a\,b_1-b\,a_1}\right)=0$$

Operando:
$u\,b_1\,du-b\,u\,dv+a\,v\,dv-a_1\,v\,du=0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(u\,b_1-a_1v)\,du+(a\,v-b\,u)\,dv=0}\cdots(**)$$

La anterior E.D. es Homogenea y se resuelve como en el caso anterior

Ejercicio 06:

Resolver:
$$(x+2y+1)\,dx+(3x+y+1)\,dy=0$$

Solución:

$u=x+2y+1 \quad \Rightarrow \quad du=d\,x+2\,d\,y$

$v=3x+y+1 \ \cdots(*) \quad \Rightarrow \quad dv=3\,d\,x+d\,y$

$$dx=\frac{\begin{vmatrix} du & 2 \\ dv & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{d\,u-2\,d\,v}{-5}, \quad dy=\frac{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 3 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{dv-3\,d\,v}{-5} \quad \cdots(**)$$

Reemplazando $(*)$ y $(**)$

$$u\left(\frac{d\,u-2\,d\,v}{-5}\right)+v\left(\frac{dv-3\,d\,u}{-5}\right)=0$$

$\Rightarrow \quad u\,d\,u-2u\,d\,v+v\,dv-3v\,d\,u=0$

$\Rightarrow \quad (u-3v)\,d\,u+(v-2u)\,d\,v=0$ E.D. Homogenea.

$$\boxed{z=\frac{v}{u}} \quad \boxed{v=z\,u} \quad \boxed{dv=z\,du+u\,dz}$$

Reemplazando:

$\Rightarrow \quad (u-3\,z\,u)\,d\,u+(z\,u-2u)\,(z\,du+u\,dz)=0 \quad \Rightarrow \quad u(1-3z)\,d\,u+u(z-2)\,(z\,du+u\,dz)=0$

$\Rightarrow \quad (1-3z)\,d\,u+(z-2)\,(z\,du+u\,dz)=0 \quad \Rightarrow \quad (1-3z)du+z^2\,du+u\,z\,dz-2z\,du-2u\,dz=0$

$\Rightarrow \quad (1-5z+z^2)\,du+(z-2)u\,dz=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{u}+\dfrac{z-2}{1-5z+z^2}dz=0$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int\frac{du}{u}+\int\frac{z-2}{1-5z+z^2}dz=0$

Continuar:..... $\Rightarrow \quad \ln u+\displaystyle\int\frac{z-2}{1-5z+z^2}dz=0$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes E.D.:

1) $(x+y-1)\,dx+(4x+3y+10)\,dy=0$

2) $(x+2y-5)\,dx+(4x+8y-9)\,dy=0$

ECUACIÓN DIFERENCIAL Y CLAIROUTS Y LAGRANGE.

E.D de Lagrange

Definición:

La E.D. de Clarante tiene la forma:

$$\boxed{y = x\,\varphi(y') + \psi(y')}$$

Método de Solución:

Se realiza la sustitución: $\boxed{y' = p}$ donde: $dy = P\,dx$

Se reemplaza en $\boxed{y = x\,\varphi(p) + \psi(p)} \cdots (*)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \qquad \text{donde: } p = p(x)$$

Donde: $p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\dfrac{dp}{dx} + \psi'(p)\dfrac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow \quad p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}$$ E.D. lineal de primer Orden.

Cuya solución general es $x = \phi(p,c)$ donde P es un parámetro.

Y la solución general de la ecuación (1) se da en forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = \phi(P,c) \\ y = \phi(p,c)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

E.D de Clairouts

Definición:

La E.D. de Clarante tiene la forma:

$$\boxed{y = xy' + \varphi(y')}$$

Método de Solución:

Se realiza la sustitución: $\boxed{y' = p}$

Se reemplaza en la E.D. $\boxed{y = xp + \varphi(p)} \cdots (*)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \qquad \text{donde: } p = p(x)$$

Donde: $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \varphi'(p)\dfrac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow \quad (x + \varphi'(p))\frac{dp}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \varphi'(p) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -\varphi'(p)} \cdots (I) \quad \text{y} \quad \boxed{p = C} \cdots (II)$$

Reemplazando (II) en (I) y (II) en $(*)$

$$\begin{cases} x = -\varphi'(C) \\ y = xC + \varphi(C) \end{cases}$$ Solución parametrica de la ecuación diferencial

Ejercicios

Resolver las siguientes E.D.

01) $y = xy' + \dfrac{1}{y}$

02) $y = x(y')^2 + (y')^2$

03) $y = x(y')^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}(y')}$