UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

3

ECUACIONES EXACTAS

La sencilla ecuación $y\,dx + x\,dy = 0$ es separable, pero también equivale a la diferencial del producto de x por y; esto es,

$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0$

Al integrar obtenemos de inmediato la solución implícita $xy = c$

En cálculo diferencial, el lector deber recordar que si $z = f(x, y)$ es una función de primeras derivadas parciales continuas en un región R del plano xy, su diferencial (que también se llama diferencial total) es

$$dz = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy \quad \cdots(1)$$

Entonces, si $f(x, y) = c$ de acuerdo con (1)

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0 \quad \cdots(2)$$

En otras palabras, dada una familia de curvas $f(x, y) = c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden si calculamos la diferencial total; por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = c$,

$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$ o en $dy = \dfrac{5y - 2x}{-5y + 3y^2}$

Para nuestros fines, es más importante darle vuelta al problema, o sea: dada una ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

¿Podemos demostrar que la ecuación equivale a $d(x^2 - 5xy + y^3) = 0$?

DEFINICIÓN: Ecuación Exacta.

Una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de alguna función $f(x, y)$. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta (diferencial exacta o ecuación exacta), si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Ejemplo 01 (Ecuación diferencial exacta)

La ecuación $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ es exacta, porque

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3dx + x^3y^2dy$$

Obsérvese que, en este ejemplo, si $M(x,y) = x^2y^3$, $N(x,y) = x^3y^2$

Entonces: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2$

El teorema 2.1 indica que esta igualdad de derivadas parciales no es una casualidad.

Sean las funciones $M(x,y)$ e $N(x,y)$ continuas, con derivadas parciales continuas en una región rectangular, R , definida por $a < x < b$, $c < y < d$.
Entonces, la condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es que

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \qquad \cdots(4)$$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ (Demostración de la Necesidad)

Supongamos $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienes primeras derivadas parciales continuas en toda (x,y) . Si la expresión $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es exacta, si existe una función f tal que, para todo x de R ,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

En consecuencia $M(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Y además: $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial x}$$

La igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x,y)$ y $N(x,y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ (La suficiencia)

Veamos que existe una función f , para el cual $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, siempre que se aplique la ecuación (4) . En realidad, la construcción de la función f constituye un procedimiento básico para resolver las ecuaciones diferenciales exactas.

MÉTODO DE SOLUCIÓN
Dada una ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, se determina si es válida la igualdad (4) .

En caso afirmativo, existe una función f para la cual $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$.

Podemos determinar f si integramos $M(x,y)$ con respecto a x , manteniendo y constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad \cdots(5)$$

En donde la función arbitraria $g(y)$ es la “constante” de integración. Ahora derivamos (5) con respecto a y y supondremos que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y) .$$

Esto da $$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \qquad \cdots(6)$$

Por último integramos (6) con respecto a y , y sustituimos el resultado en la ecuación (5). La solución de la ecuación es $f(x,y) = c$.

NOTA.
Es pertinente hacer algunas observaciones. La primera es importante darse cuenta de que la expresión $N(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$ en la ecuación (6) es independiente de x porque:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

En segundo lugar, también pudimos iniciar el procedimiento anterior suponiendo de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

Después de integrar N con respecto a y y derivar el resultado, llegaríamos a los análogos de las ecuaciones (5) y (6) que serían, respectivamente,

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \qquad \text{y} \qquad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$$

En ambos casos, no se deben memorizar las fórmulas.

Ejemplo 02 Solución de una ecuación diferencial exacta.

Resolver: $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$

Solución:

Igualamos $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - 1$, tenemos: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

En consecuencia la ecuación es exacta y, de acuerdo con el teorema 2.1 existe una función $f(x,y)$,

tal que: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x \ -1$

Al integrar la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$f(x,y) = x^2 y + g(y)\,.$$

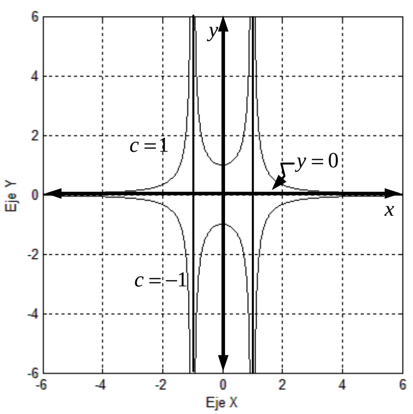
Determinamos la derivada parcial con respecto a y , igualamos el resultado a $N(x,y)$ y obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \qquad \leftarrow N(x,y)$$

Por lo tanto, $g'(y) = -1$ y $g(y) = -y$.

No es necesario incluir la constante de integración en este caso porque la solución es $f(x,y) = c$.

En la siguiente figura se ilustra las curvas de la familia $x^2 y - y = c$



NOTA

La solución de la ecuación no es $f(x,y) = x^2 y - y$, sino que es $f(x,y) = c$ o $f(x,y) = 0$, si se usa una constante en la integración de $g'(y)$. Obsérvese que la ecuación también se podría haber resuelto por separación de variables.

Ejemplo 03 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resolver $(e^{2y} - y\cos xy)dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy = 0$

Solución:

La ecuación es exacta, porque $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xysenxy - \cos xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Entonces, existe una función $f(x,y)$, para el cual

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Para variar, comenzaremos con la hipótesis $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

Esto es, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$

$$f(x,y) = 2x\int e^{2y}dy - x\int \cos xy\ dy + 2\int y\,dy$$

Recuérdese que la razón por la que x sale del símbolo $\int$ es que en la integración con respecto a y se considera que x es una constante ordinaria. Entonces

$$f(x,y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy \qquad \leftarrow M(x,y)$$

Así que $h'(x) = 0$ o $h(x) = c$, por consiguiente, una familia de soluciones es:

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0$$

Ejemplo 04 Un problema de valor inicial

Resolver el problema de valor inicial

$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0$, $y(0) = 2$.

Solución La ecuación es exacta, porque: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$$

La última ecuación implica que $h'(x)=\cos x \operatorname{sen} x$. Al integrar obtenemos

$$h(x)=-\int(\cos x)(-senx)\,dx=-\frac{1}{2}\cos^2 x$$

Así. $\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{1}{2}\cos^2 x=c_1$ o sea $y^2(1-x^2)-\cos^2 x=c$,

Donde hemos reemplazado $c=2c_1\ldots$

Para que se cumpla la condición inicial $y=2$ cuando $x=0$, se requiere que: $4(1)-\cos^2(0)=c$, es decir, que $c=3$. Así, una solución del problema es $y^2(1-x^2)-\cos^2 x=3$

NOTA:

Al probar si una ecuación es exacta se debe asegurar que tiene la forma precisa $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$. Quizá en ecuaciones haya una ecuación diferencial de la forma $C(x,y)dx=H(x,y)dy$. En este caso se debe reformular primero como $G(x,y)\,dx-H(x,y)\,dy=0$, y después identificar $M(x,y)=G(x,y)$ y $N(x,y)=-H(x,y)$, y sólo entonces aplicar la ecuación (4).

Ejemplo 05.

Resolver: $3y+e^x+(3x+\cos y)y'=0$

Solución:

Expresamos la ecuación de la forma:

Como: $3y+e^x+(3x+\cos y)\frac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad (3y+e^x)\,dx+(3x+\cos y)\,dy=0$

Entonces:

$M(x,y)=3y+e^x$ y $N(x,y)=3x+\cos y$

Verificamos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3y+e^x)=3 \quad\text{y}\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3x+\cos y)=3$$

De lo anterior la ecuación diferencial es EXACTA.

Calculando la función potencial f (que nos dará directamente las soluciones $f(x,y)=C$)

Si $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=3y+e^x}\cdots(I)$ y $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=3x+\cos y}\cdots(II)$

Integrando (I) respecto de x,se tiene:

$$\boxed{f(x,y)=3yx+e^x+g(y)}\cdots(**)$$

Derivando respecto de y, lo anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x+g'(y)$$

Igualando con (II), tenemos: $3x+g'(y)=3x+\cos y$

De aquí $g'(y)=\cos y \quad\Rightarrow d\left[\,g(y)\right]=\cos y\,dy$

Integrando respecto de $y \quad\Rightarrow\quad g(y)=\operatorname{sen} y+C_1$

Luego, reemplazando en $(**)$, obtenemos: $f(x,y)=3yx+e^x+\operatorname{sen} y+C_1$

Por lo tanto la solución de la E.D. es: $f(x,y)=C_0$

$$\Rightarrow\quad 3yx+e^x+\operatorname{sen} y+C_1=C_0$$

Lo que es lo mismo: $3yx+e^x+\operatorname{sen} y+C=0$ donde $C=C_1-C_0$

Ejemplo 06.

Resolver: $(2y^2x-3)\,dx+(2yx^2+4)\,dy=0$

Solución:

De la expresión dada:

$M(x,y)=2y^2x-3$ y $N(x,y)=2yx^2+4$

Verificamos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2y^2x-3)=4xy \quad\text{y}\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2yx^2+4)=4xy$$

De lo anterior la ecuación diferencial es **EXACTA**.

Calculando la función potencial f (que nos dará directamente las soluciones $f(x,y)=C$)

Si $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2y^2x-3}\cdots(I)$ y $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=2yx^2+4}\cdots(II)$

Integrando (II) respecto de y,se tiene:

$$\boxed{f(x,y)=y^2x^2+4y+g(x)}\cdots(**)$$

Derivando respecto de x, lo anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2x+g'(x)$$

Igualando con (I), tenemos: $2yx^2+g'(x)=2yx^2-3$

De aquí $g'(x)=-3 \quad\Rightarrow d\left[\,g(x)\right]=-3\,dx$

Integrando respecto de $x \quad\Rightarrow\quad g(x)=-3x$

Luego, reemplazando en $(**)$, obtenemos: $f(x,y)=y^2x^2+4y-3x$

Por lo tanto la solución de la E.D. es: $f(x,y)=C$

$$\Rightarrow\quad y^2x^2+4y-3x=C$$

Ejemplo 07.

Resolver: $$\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x=0$$

Solución:

La expresión podemos representar como: $\left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x\right)dx+\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)dy=0$

En este caso se tiene::

$M(x,y)=\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x$ y $N(x,y)=2y-\frac{1}{x}+\cos 3x$

Verificamos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\operatorname{sen}3x\right)=\frac{1}{x^2}+3\operatorname{sen}3x$$

Además:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)=\frac{1}{x^2}-3\operatorname{sen}3x$$

Se observa que $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$,

Como no se verifica la condición, podemos afirmar que la E.D. **NO ES EXACTA**.

Ejemplo 08.

Hallar el valor de k para que la ecuación diferencial sea exacta:

$$(y^3+kxy^4-2x)\,dx+(3xy^2+20x^2y^3)\,dy=0$$

Solución:

Vemos que: $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=y^3+kxy^4-2x$ $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=3xy^2+20x^2y^3$

Para que sea diferencial exacta, se debe cumplir que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^3+kxy^4-2x)=3y^2+4kxy^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2+20x^2y^3)=3y^2+40xy^3$$

Igualando: $3y^2+4kxy^3=3y^2+40xy^3$, resolviendo: $4k=40$

$$\Rightarrow \quad k=\boxed{10}$$ ***Rpta.***

Ejemplo 09.

Obtener una función $M(x,y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$M(x,y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

Solución:

Como : $N(x,y)=xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}$

Para que la E.D. exacta se debe cumplir que: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

Como: $$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)=e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}$$

Dela condición igualando:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}$$

$$dM=\left(e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}\right)dy$$

Integrando lo anterior respecto de y (x representa una constante), se obtiene:

$$M(x,y)=\int\left(e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}\right)dy=\frac{1}{x}e^{xy}+\frac{(xy-1)}{x}e^{xy}+y^2-\frac{1}{x^2}y+g(x)$$

Entonces:

$$M(x,y)=\int\left(e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}\right)dy=\frac{1}{x}e^{xy}+\frac{(xy-1)}{x}e^{xy}+y^2-\frac{1}{x^2}y+g(x)$$

Luego: $$M(x,y)=ye^{xy}+y^2-\frac{1}{x^2}y+g(x)$$

Ejemplo 10.

Mostrar que la siguiente ecuación diferencial NO es una E.D. exacta:

$$6xy\,dx+(4y+9x^2)\,dy=0$$

y que al multiplicarla por $\mu(x,y)=y^2$ es una E.D. exacta, y por lo tanto puede resolverla.

Solución:

De la E.D. $6xy\,dx+(4y+9x^2)\,dy=0$

Se tiene: $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=6xy$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=4y+9x^2$

Verificando se es una E.D. Exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(6xy)=6x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4y+9x^2\right)=18x$$

Esto es, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, y por lo tanto NO es una E.D. Exacta.

Si multiplicamos el factor $\mu(x,y) = y^2$

La E.D resultante es: $6xy^3\,dx + (4y^3 + 9x^2y^2)\,dy = 0$

Llamando nuevamente:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 6xy^3}\cdots(I) \qquad \text{y} \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 4y^3 + 9x^2y^2}\cdots(II)$$

Verificando que es una E.D. Exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6xy^3\right) = 18xy^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3 + 9x^2y^2\right) = 18xy^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}}$$

Integrando la primera ecuación en (I) respecto de x (manteniendo a y constante), se obtiene:

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + g(y) \qquad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2 + g'(y)$$

Esto es por (II) igualando:

$$9x^2y^2 + g'(y) = 4y^3 + 9x^2y^2 \iff g'(y) = 4y^3 \qquad \Rightarrow \qquad g(y) = y^4$$

Luego: $f(x,y) = 3x^2y^3 + y^4$

Por lo tanto, la solución general de la E.D. y por ende de la (I) es:

$$f(x,y) = C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{3x^2y^3 + y^4 = C}$$

Ejemplo 11.

Mostrar que la E.D. $(-xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x)\,dx + 2x\cos x\,dy = 0$

y mostrar que el factor: $\mu(x,y) = xy$ al multiplicar a la E.D. se convierte en EXACTA y resolverla.

Solución:

Si llamamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = -xy\,\mathrm{sen}\,x + 2y\cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x\cos x$$

Con lo que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos x - 2x\,\mathrm{sen}\,x$$

En consecuencia: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ NO es una E.D. EXACTA

Si multiplicamos el factor $\mu(x,y) = xy$

$$(-x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x)\,dx + 2x^2y\cos x\,dy = 0$$

Nuevamente llamamos:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = -x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x}\cdots(I) \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2y\cos x}\cdots(II)$$

Con lo que: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = -2x^2y\,\mathrm{sen}\,x + 4xy\cos x$ luego, es una E.D. EXACTA

Integrando la segunda ecuación (II) respecto de y (manteniendo a x constante), se obtiene:

$$\boxed{f(x,y) = x^2y^2\cos x + g(x)}\cdots(\Delta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\cos x - x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + g'(x) = -x^2y^2\,\mathrm{sen}\,x + 2xy^2\cos x$$

Esto es: $g'(x) = 0 \iff g(x) = k$, reemplazado en (Δ)

$$\Rightarrow \qquad f(x,y) = x^2y^2\cos x + k$$

Por lo tanto, la solución general de la ED y por ende de la es:

$$x^2y^2\cos x + k = c_1 \iff x^2y^2\cos x = c_1 - k$$

$$\iff \boxed{x^2y^2\cos x = c}$$

ECUACIONES EXACTAS (Resumen).

Son de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\,,$$

Es decir: $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$,

Se debe verificar que se cumple: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Se busca una función $f(x,y)$ tal que $df = Mdx + Ndy$,

y la solución de la E.D. es $f(x,y) = C$. (Siendo C una constante).