UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

4

FACTORES INTEGRANTES

Supongamos que ahora que nos dan una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \cdots (I)$$

Que no es exacta. ¿Existe alguna forma de hacerla exacta?

Con más precisión, ¿Existirá una función $\mu(x,y)$ de forma que la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \quad \cdots (II)$$ sea exacta?

Esta cuestión es fácil de responder, en principio: para que la ecuación (II) sea exacta se debe cumplir que: $$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)]$$

o equivalentemente $$M\frac{\partial}{\partial y}\mu + \mu\frac{\partial}{\partial y}M = N\frac{\partial}{\partial x}\mu + \mu\frac{\partial}{\partial x}N \qquad \cdots (III)$$

Así pues, la ecuación (II) es exacta si y solo si μ satisface la ecuación (III)
Debe notarse ahora que las ecuaciones (I) y (II) son equivalentes en el sentido siguiente: $y(x)$ es solución de la ecuación (I) si y solo si lo es de la ecuación (II).

Definición

Una función $\mu(x,y)$ que satisfaga la ecuación (III) se dice que es un factor integrante de la ecuación (I)

Vemos así que para que μ sea un factor integrante debe satisface la ecuación (III), que es una ecuación en derivadas parciales, habitualmente muy difícil de integrar salvo en muy pocos casos. Do de los casos en los que esta ecuación se puede integrar es cuando el factor integrante sólo depende de x o sólo depende de y. Estudiaremos estos dos casos particulares:

CASOS PARTICULARES

(a) Factores integrantes que sólo dependen de x.

Si μ depende solo de t entonces la ecuación (III) queda reducida a :

$$N\frac{d\mu}{dx}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{d\mu}{dx}=\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}\mu$$

Ahora bien, esta ecuación sólo tiene sentido si la expresión

$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es una función sólo de x, esto es, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=R(x)$.

En este caso μ debe ser una solución de la ecuación de variables separables: $\mu'=R(x)\mu$.

Es decir, (resolviendo) $\mu=\exp(\int R(x)dx)$ es un factor integrante de la ecuación (I)

OBSERVACIÓN

La expresión $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es, por lo general, función de las dos variables x e y. Sólo para muy especiales pares de funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ es una función sólo de la variable x.

Ejemplo 01:

Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{y^2}{2}+2ye^x+(y+e^x)y'=0 \qquad \cdots(IV)$$

Solución:

En este $M(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+2ye^x$ e $N(x,y)=y+e^x$.

No es una ecuación exacta porque:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=y+2e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=e^x.$$

Ahora bien

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{y+e^x}{y+e^x}=1$$

Por lo que un factor integrante $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$. Así pues la ecuación:

$e^x\left(\dfrac{y^2}{2}+2ye^x\right)+e^x(y+e^x)y'=0$ (que es equivalente a la ecuación (IV) es exacta.

Calculamos la función de potencial correspondiente:

$$f(x,y)=\int\left(\frac{y^2}{2}e^x+2ye^x\right)dx+h(x)=\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}+h(y)$$

$$\text{y} \qquad ye^x+e^{2x}=\frac{\partial f}{\partial y}=ye^x+e^{2x}+h'(y) \qquad \Rightarrow \quad h'(y)=0$$

Con lo que $h(y)=c$ y una función de potencial es: $f(x,y)=\dfrac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}$

Y la solución general de (IV) (en forma implícita es: $\dfrac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=C$

(b) El factor integrante sólo depende de y

Si $\mu = \mu(y)$ sólo depende de y la situación es parecida a la descrita más arriba. Para que tales factores integrantes existan debe suceder que:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = Q(y)$$

Sea función sólo de y. En tal caso el factor integrante es $\mu(y) = \exp\left(\int Q(y)dy\right)$

Ejemplo 02:

Encuéntrese la solución general de la ecuación

$$\left(2xy\ln y\right)dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$$

Solución

En este caso $M(x,y) = 2xy\ln y$ e $N(x,y) = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$

Por lo tanto: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(\ln x + 1)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, la ecuación diferencial no es exacta:

Calculemos: $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x\ln y - 2x}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}$$

Existe entonces un factor integrante, μ que sólo depende de y. Este factor integrante debe ser solución de la ecuación: $\mu' = -\frac{1}{y}\mu$.

Así pues: $\ln\mu = -\ln y \quad \Rightarrow \quad \mu(y) = \frac{1}{y}$.

Multiplicamos el factor integrante en la ecuación original , y obtenemos la ecuación

$$2x\ln y\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$$ es exacta.

Calculamos una función de potencial $f(x.y) = \int 2x\ln y\; dx + h(y) = x^2\ln y + h(y)$

Entonces $h(y) = \int y(y^2+1)^{1/2}dy = \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}$

La función de potencial será: $f(x,y) = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}$

Y la solución general de la ecuación pedida es: $x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{3/2} = C$

Siendo C una constante arbitraria.

NOTA:

Recordar que el término de factor integrante ya apareció cuando calculamos la forma general de soluciones de las ecuaciones lineales no homogéneas. (Veremos más adelante)

De hecho todos los tipos de ecuaciones que hemos visto hasta ahora son ecuaciones exactas o reducibles a exactas mediantes un factor integrantes.
En efecto, recordemos que las ecuaciones en variables separables se pueden escribir de la forma:

$$h(x)dx + g(y)dy = 0$$

Por lo tanto, $M(x,y) = h(x)$ y $N(x,y) = g(y)$. Esta ecuación es exacta cualquiera que sean las funciones $h(x)$ y $g(y)$ porque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

La función de potencial del campo $(h(x), g(y))$ se calcula, en este caso de manera muy sencilla.

La función $f(x,y)$ la función potencial de $(h(x), g(y))$

$$f(x,y) = \int h(x)dx + k(y) = H(x) + k(y)$$

Donde $H(x)$ es una primitiva de $h(x)$; esto es $H(x) = \int h(x)dx$.

Ahora: $g(y) = \frac{\partial h}{\partial y} = k'(y)$

Porque H no depende de y. Así pues $k(y) = \int g(y)dy = G(y)$.

La función potencial será: $f(x,y) = H(x) + G(y)$.

Y la solución general de la ecuación: $H(x) + G(y(x)) = C$

Que es la forma general de las soluciones de las ecuaciones separables.

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER

Definición:

Las ecuaciones lineales de primer orden son las que se pueden reducir a la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=r(x) \qquad (I)$$

Donde las funciones $p(x)$ y $r(x)$ dependen solamente de la variable independiente x.

Por ejemplo la ecuación $x^2 sen(x)-(\cos x)y=(\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx}$

Es lineal porque se puede escribir en la forma: $\frac{dy}{dx}+(\operatorname{cotg} x)y=x^2$

Si $r(x)=0$, entonces la ecuación (I) se dice que es **lineal homogénea** y en caso contrario que es lineal no homogénea.

Resolución de E.D. homogéneas. En este caso, la ecuación (I) se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$$

que es una ecuación en variables separables. En primer lugar, esta ecuación siempre tiene una solución de equilibrio $y(x)=0$. Separando las variables:

$$\frac{1}{y}dy=-p(x)dx$$

Integrando: $\ln|y(x)|=-\int p(x)dx+C_1$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es: $\boxed{y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}}$

Siendo $C=e^{C_1}$ una constante distinta de cero. En este caso, si permitimos que C pueda valer cero, obtenemos todas las soluciones de la ecuación incluida la solución de equilibrio.

Consideramos ahora el caso no homogéneo. Hay varias formas de obtener las soluciones. Más adelante estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales y las diferenciales lineales de orden superior a 1.

Resolución de la E.D. Lineal no homogénea, por el método ED EXACTAS.

Sea la E.D.

$$y'+p(x)y=r(x) \qquad \cdots(s)$$

El factor integrante lo definimos como: $F(x)=e^{\int p(x)dx}$

Ahora bien, la ecuación (s) se puede escribir en la forma $[\ p(x)y-r(x)\ ]dx+dy=0$

Que no es exacta, pero que admite un factor integrante $\mu(x)$ que solo depende de x. En efecto, como en este caso $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ la ecuación (s) queda: $\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$

Con $M(x,y)=p(x)y-r(x)$ y $N(x,y)=1$.

Por lo tanto, μ debe satisfacer: $\mu'(t)=\mu(x)p(x)$

El factor integrante lo definimos como: $F(x)=e^{\int p(x)dx}$

$F(x)[\ p(x)y-r(x)\ ]dx+F(x)dy=0$ Es una **ecuación diferencial exacta**.

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F(x)[\ p(x)y-r(x)\ ] \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=F(x)dy$$

Integrando respecto de y

$$f(x,y)=F(x)y+g(x) \qquad \cdots(*)$$

Derivando respecto de x

$f(x,y)=F(x)y+g(x)$ Se sabe que: $F'(x)=p(x)F(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F'(x)y+g'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F(x)p(x)y+g'(x)=F(x)[\ p(x)y-r(x)\ ]$$

$$g'(x)=-F(x)r(x)$$

Integrando: $g(x)=-\int F(x)r(x)dx$

$$f(x,y)=F(x)y-\int F(x)r(x)dx$$

Luego la solución es: $f(x,y)=C$, es decir: $F(x)y-\int F(x)r(x)dx=C$

Despejando $y=\frac{1}{F(x)}\left[\int F(x)r(x)dx+C\right]$

$$y=\frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left[\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+C\right] \quad ó \quad \boxed{y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+C\right]}$$

Ejemplo 03

Encuéntrese la solución general de la ecuación: $y'+2y=3e^{x}$

Solución:

Calculamos el factor integrante: $F(t)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int 2\,dx}=e^{2x}$

que sustituido en la expresión $(*)$ nos da

$$y(x)=\frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}3e^{x}dx+C\right]=\frac{1}{e^{2x}}\left[\int 3e^{3x}dx+C\right]=\frac{1}{e^{2x}}\left[e^{3x}+C\right]$$

La solución general será: $y(x)=e^{x}+Ce^{-2x}$, C una constante cualquiera.

Resolución de la E.D. Lineal no homogénea,
por el método VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

Es un método para calcular las soluciones de ecuaciones o sistemas no homogéneos.

El método de variación de constantes tiene por buscar una solución particular de la ecuación lineal homogénea. ¿Por qué es importante encontrar tal solución?

El motivo es el siguiente: Supongamos que hemos conseguido una solución particular de la ecuación no homogénea, $y_p(x)$. Veamos que la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y(x)=y_h(c)+y_p(x).$$

Donde $y_h(x)$ es la solución general de la ecuación lineal homogénea.

En efecto $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ es solución de la ecuación lineal $y'+p(x)y=r(x)$ porque:

$$\begin{aligned}y'(x)&=y'_h(x)+y'_p(x)\\&=-p(x)y_h(x)-p(x)y_p(x)+r(x)\\&=-p(x)\left[y_h(x)+y_p(x)\right]+r(x)\\&=-p(x)y(x)+r(x)\end{aligned}$$

Además si $y=y(x)$ es una solución de la ecuación $y'+p(x)y=r(x)$ y $y_p(x)$ es una solución particular entonces $h(x)=y(x)-y_p(x)$ es la solución de la ecuación lineal homogénea $y'+p(x)y=0$. En efecto,

$$\begin{aligned}h'(x)+p(x)h(x)&=y'(x)-y'_p(x)+p(x)\left[y(x)-y_p(x)\right]\\&=-p(x)y(x)+r(x)+p(x)\,y_p(x)-r(x)+p(x)\left[y(x)-y_p(x)\right]\\&=-p(x)\left[y(x)-y_p(x)\right]+p(x)\left[y(x)-y_p(x)\right]=0\end{aligned}$$

Así pues, la soluciones general de la ecuación $y'+p(x)y=r(x)$ tiene la forma $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ tal y como se deseaba mostrar.

Ya sabemos cómo conseguir la solución general de la ecuación lineal homogénea. El método de variación de las constantes nos proporciona una forma de obtener una solución particular de la no homogénea.

En este método parte de la siguiente observación:

Si mediante cualquier procedimiento fuéramos capaces de encontrar una solución particular $y_p(x)$, de la ecuación

$$y' + p(x)y = r(x)\,.$$

Entonces la función $y(x)$ es la solución general de la ecuación $y' + p(x)y = r(x)$, si y sólo si $y_h(x) = y(x) - y_p(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea $y' + p(x)y = 0$.

En efecto,
$$\begin{aligned} y'_h(x) = y'(x) - y'_p(x) &= r(x) - p(x)y(x) - r(x) + p(x)y_p(x) \\ &= -p(x)\left[y(x) - y_p(x)\right] = -p(x)y(x) \end{aligned}$$

De modo que $y_h(x)$ es una solución de la ecuación no homogénea $y' + p(x)y = r(x)$ entonces $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ es solución de la ecuación no homogénea, lo que se comprueba por simple sustitución.

El método de variación de las constantes es una manera efectiva de conseguir una solución particular de la ecuación no homogénea, y consiste en considerar la solución general de la ecuación lineal homogénea:

$y_h(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$ y sustituir la constante C por una función $C(x)$.

Una vez hecho esto se sustituye la función resultante

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

en la ecuación a resolver $y' + p(x)y = r(x)$ y se halla la función $C(x)$ para que $y_p(x)$ sea solución de la ecuación. Concretamente

$$y'_p(x) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x)) = e^{-\int p(x)dx}\,,$$

De modo que
$$r(x) = y'_p(x) + p(x)\,y_p(x) = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = C'(x)\,e^{-\int p(x)dx}$$

Por lo tanto:
$$C'(x) = e^{\int p(x)dx}\,r(x)$$

Así, si ponemos $F(x) = e^{\int p(x)dx}$

Tenemos que $C(x) = \int F(x)\,r(x)\,dx$

$$y_p(x) = \frac{1}{F(x)}\int F(x)\,r(x)\,dx$$

Así pues, la solución general de la ecuación lineal no homogénea es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + \frac{1}{F(x)}\int F(x)\,r(x)\,dx$$

Es decir: $\boxed{y(x) = \frac{1}{F(x)}\left[\int F(x)r(x)dx + C\right]}$ $\cdots(*)$.

A la función $F(x)$ se llama factor integrante de la ecuación.