UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

2

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

A menudo nos interesa resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que zona las condiciones que es imponen a $y(x)$ o a sus derivadas.

En algún intervalo Ω que contenga a x_0, el problema

Resolver: $\dfrac{d^n y}{d x^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad \cdots (1)$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$

En donde $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, se llama un problema de valor inicial.

Dicho problema también es denomina ***problema de valor inicial de enésimo orden.***

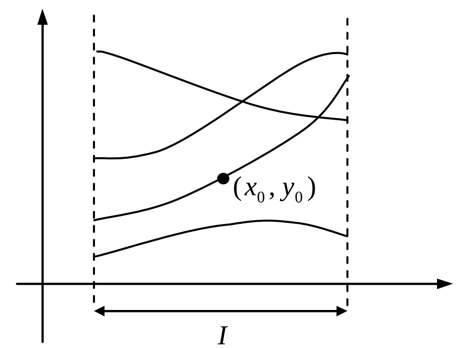
A los valores dados de la función desconocida, $y(x)$, y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0, se le denominan ***Condiciones Iniciales.***

1. PROBLEMA DE VALOR INICIAL DE PRIMER ORDEN

Resolver: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ Sujeta a $y(x_0) = y_0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

Si buscamos una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que una curva de solución pase por el punto (x_0, y_0)



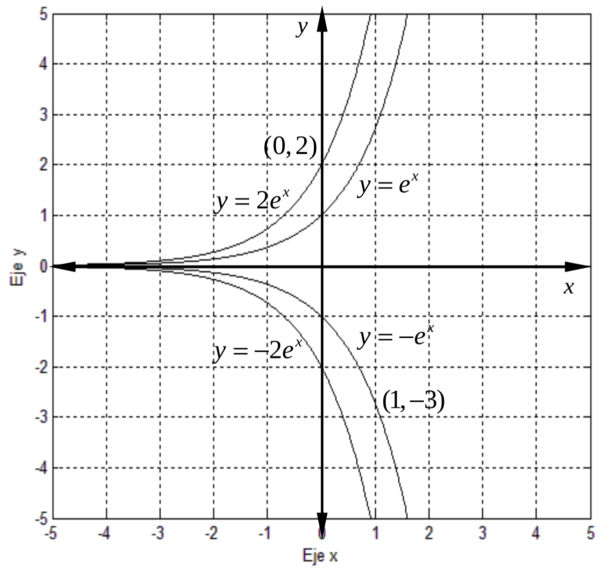
Ejemplo 1:
Resolver el problema de valor inicial: $y' = y$,
sujeto a distintas condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y(1) = -3$

Solución:

Como $y = ce^x$ es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación $y' = y$, de primer orden en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Al sustituir $x = 0$, $y = 2$ en la familia, se puede determinar la constante: $2 = ce^0 = c$
En consecuencia, la función $y = 2e^x$ es una solución del problema de valor inicial dado.

GRAFICAMENTE



EXISTENCIA Y UNICIDAD

Al resolver un problema de valor inicial surgen dos asuntos fundamentales:

¿Existe una solución al problema?
Si la hay, ¿es única?

Existencia:

¿La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ tiene soluciones?
¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0) ?

Unicidad
¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0) ?

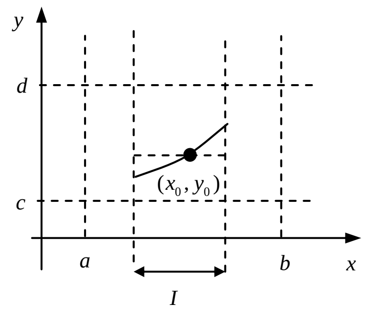
Nótese que en el ejemplo 1 , empleamos la frase “una solución” y no “la solución” del problema. El artículo indefinido se usa deliberadamente para indicar la posibilidad de que existan otras soluciones. Hasta ahora no hemos demostrado que haya una solución única para cada problema. El ejemplo siguiente es de un problema de valor inicial con dos soluciones.

TEOREMA 1.1 Existencia de una solución única.

Sea R una región rectangular del plano xy , definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, que contiene al punto (x_0, y_0). Si $f(x,y)$ y $\dfrac{df}{dy}$ son continuas en R , ***entonces*** existe un intervalo I , centrado en x_0 y una función única, $y(x)$ definida en I , que satisface el problema de valor inicial expresado por las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{Sujeta a} \quad y(x_0) = y_0$$

El resultado anterior es uno de los teoremas más comunes de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden, ya que es bastante fácil comprobar los criterios de continuidad de $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. En la figura que sigue podemos ver la interpretación geométrica del teorema 1.1.

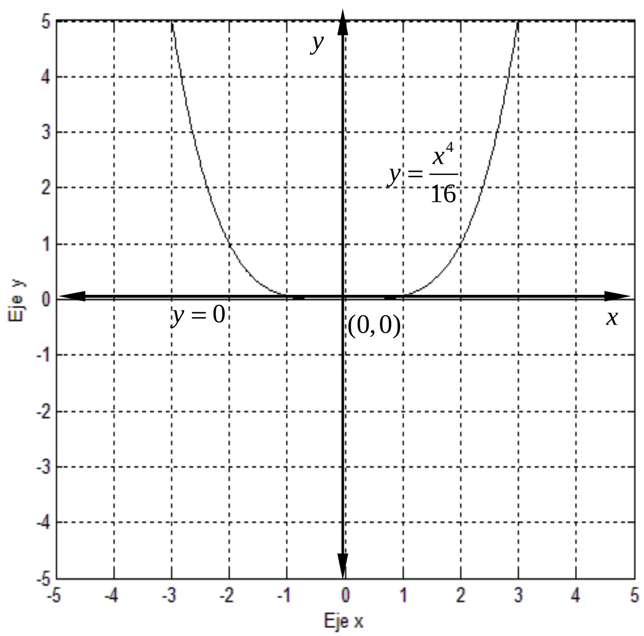


Ejemplo 03 Un problema de valor inicial puede tener varias soluciones.

Ambas funciones $y=0$ y $y=\frac{x^4}{16}$, satisfacen la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$, y la condición inicial $y(0)=0$, de modo que el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx}=xy^{1/2} \quad , \quad y(0)=0$$

Tiene dos soluciones cuando menos. Como vemos en la figura 1.6, las gráficas de ambas funciones pasan por el mismo punto, $(0,0)$.



Dentro de los confines seguros de un curso formal de ecuaciones diferenciales, se puede asumir, que la mayor parte de las ecuaciones diferenciales tienen soluciones y que las soluciones de los problemas de valor inicial probablemente sean únicas. Sin embargo, en la vida real las cosas no son tan idílicas.

Por consiguiente, antes de resolver un problema de valor inicial es preferible conocer, si existe una solución y, cuando exista, si es la única. Puesto que vamos a manejar ecuaciones diferenciales de primer orden en los dos capítulos siguientes, enunciaremos aquí, sin demostrarlo, un teorema que define las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución a un problema de valor inicial de primer orden, para ecuaciones que tengan la forma de las ecuaciones (2) .

Ejemplo 04. Regreso al ejemplo 03

En el ejemplo anterior vimos que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$ tiene cuando menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por el $(0,0)$. Al examinar las funciones

$$f(x,y)=xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{2y^{1/2}}$$

Se advierte que son continuas en el semiplano superior definido por $y>0$; por consiguiente el teorema 1.1 permite llegar a la conclusión de que para cada punto (x_0,y_0) , $y_0>0$ de ese semiplano, hay un intervalo centrado en x_0 en que la ecuación diferencial tiene una solución única. Así por ejemplo, sin resolverla, sabemos que existe un intervalo centrado en 2 en que el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$, $y(2)=1$, tiene solución única.

El teorema 1.1 garantiza que , en el ejemplo 1, no hay otras soluciones de los problemas de valor inicial

$$y'=y \quad , \quad y(0)=3$$
$$y'=y \quad , \quad y(1)=-2$$

A parte de $y=3e^x$ y $y=-2e^{x-1}$, respectivamente.

Esto es consecuencia de que $f(x,y)=y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=1$, son continuas en todo el plano xy . También se puede demostrar que el intervalo en que está definida cada solución es $(-\infty,\infty)$.

Ejemplo 05 Intervalo de existencia

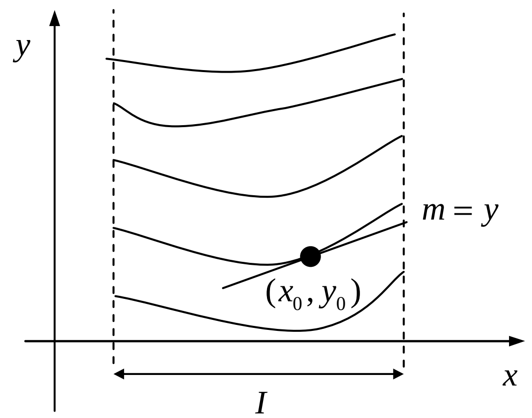
En la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$ son ambas polinomios en x e y, por consiguiente, continuas en cualquier punto. En otras palabras, la región R de l teorema 1.1 es todo el plano xy, en consecuencia, por cada punto dado (x_0, y_0) pasa una y sólo una curva de solución. Sin embargo, observemos que esto no significa que el intervalo máximo I de validez de una solución de un problema de valor inicial sea, necesariamente, $(-\infty,\infty)$. El intervalo I no necesita ser tan amplio como la región R. En general, no es posible hallar un intervalo específico I en que se defina una solución sin resolver la ecuación diferencial (Veas los ejercicios 18, 19, 29 de los ejercicios)

2. PROBLEMA DE VALOR INICIAL DE SEGUNDO ORDEN

Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$

Sujeta a $y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1$

Para determinar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no solo pase por (x_0, y_0), si no también pase por eses punto de tal manera que la pendiente de la curva en ese lugar ser y_1, ver la figura.



NOTA:

- El término de ***condición inicial*** procede de los sistemas físicos en que la variable independiente es el tiempo t de donde $y(t_0)=y_0$, y $y'(t_0)=y_1$, representan, respectivamente, la posición y la velocidad de un objeto en cierto momento o tiempo inicial t_0.

- A menudo, la solución de un problema de valor inicial de orden n entraña la aplicación de una familia $n-$paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada para determinar n constantes especializada, de tal modo que la solución particular que resulte para la ecuación "se ajuste" (0 satisfaga) a las n condiciones iníciales.

Ejemplo 2:

Determinar la solución del problema de valor inicial

$$x''+16x=0 \quad , \quad x(\pi/2)=-2 \qquad x'(\pi/2)=1$$

Solución:

Se conoce que $x(t)=c_1\cos(4t)+c_2\operatorname{sen}(4t)$ es una familia biparamétrica de soluciones de $x''+16x=0$.

Si sustituimos $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$ en la familia dada las soluciones:

$$x(\pi/2)=c_1\cos\left(4\frac{\pi}{2}\right)+c_2\operatorname{sen}\left(4\frac{\pi}{2}\right)=c_1\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}+c_2\underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{=0}=-2 \;\Rightarrow\; \boxed{c_1=-2}.$$

Para poder sustituir $x'(\pi/2)=1$, debemos tener la derivada $x(t)=-2\cos(4t)+c_2\operatorname{sen}(4t)$, lo que resulta $x'(t)=8\operatorname{sen}(4t)+4c_2\cos(4t)$, reemplazando:

$$x'(\pi/2)=8\operatorname{sen}\left(4\frac{\pi}{2}\right)+4c_2\cos\left(4\frac{\pi}{2}\right)=8\underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{=0}+4c_2\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}=1$$

Por lo tanto: $\boxed{c_2=\dfrac{1}{4}}$

En consecuencia: $x(t)=-2\cos(4t)+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)$ es la solución de PVI.

La ED como Campo Vectorial

La ecuación diferencial de primer orden reutla respectivo a la derivada

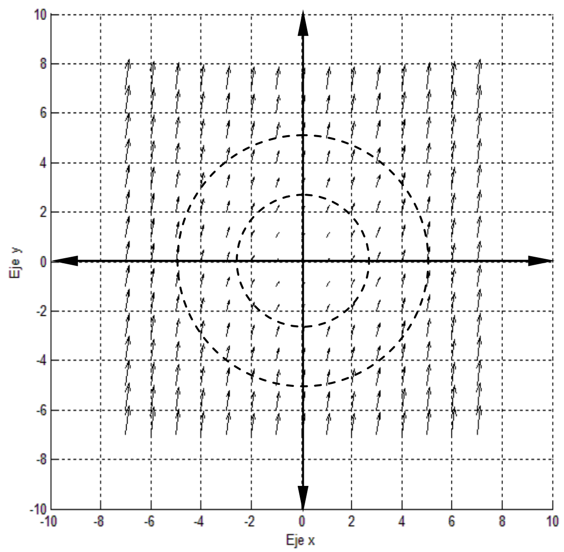
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

establece una dependencia entre las coordenadas (x, y) de un punto y la pendiente de la curva solución $y(x)$ que pasa por ese punto.

Ejemplo:
La ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nos dice que a lo largo de la curva $x^2 + y^2 = 1$, las curvas de solución de la ecuación tiene pendiente 1, es decir, cruzan la circunferencia de radio 1 con un ángulo de $45°$.
Ver la figura siguiente

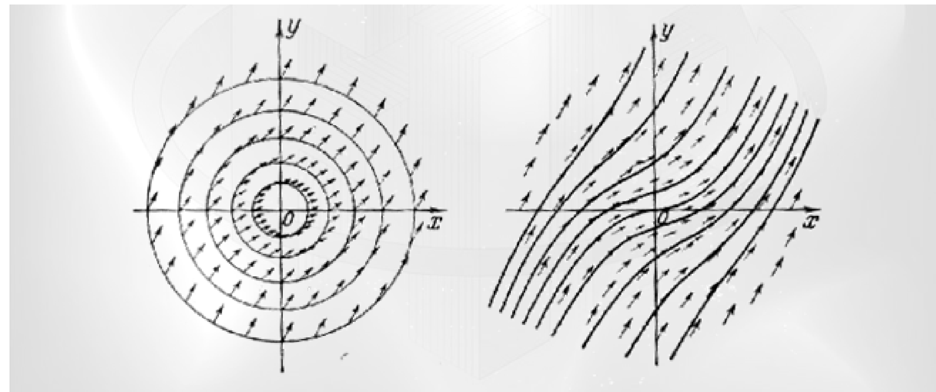


$$\frac{d\,y}{d\,x} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

MÉTODO DE LAS ISOCLINAS

Dado valores constantes K a la derivada, $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = K$ podemos encontrar las curvas $f(x, y) = K$ en donde las soluciones pasan un mismo ángulo de inclinación. A estas curvas se les llama **isóclinas**.

Para el ejemplo corresponden a $x^2 + y^2 = K$, son circunferencias de radio $\sqrt{K}$ y centro en el origen. Las isóclinas facilitan el trazado del **campo de direcciones** y por lo tanto el de las soluciones de la ED.



Ejercicio.

a) Encontrar la ecuación de las isóclinas para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

b) ¿Qué tipo de curvas son estas isóclinas?

c) Dibujar las isóclinas y con ayuda de éstas dibujar el campo de direcciones y algunas curvas solución.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN ANALÍTICA

No existe un **método general** para resolver ED's es decir, dada una ecuación diferencial no tenemos un procedimiento para halla su solución analítica.

Sin embargo, en algunos casos particulares bien identificados si se tienen procedimientos para calcular dicha solución.

El único método entonces consiste en saber **identificar el tipo de ED** que se quiere resolver.

- Si es un caso conocido. Aplicar el procedimiento correspondiente.
- Si no es un caso conocido, intentar algún cambio de variable que la transforme en un caso conocido.

Si no funciona lo anterior, algunas alternativas consisten en buscar soluciones:

- Basadas en Series
- Numéricas
- Geométricas

2. VARIABLES SEPARABLES

Solución por integración.

Empezaremos nuestro estudio de la metodología para resolver ecuaciones de primer orden, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, con la más sencilla de todas la ecuaciones diferenciales.

Cuando f es independiente de la variable y, esto es cuando $f(x, y) = g(x)$ la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (1)$$

Se puede resolver por integración. Si $g(x)$ es una función continua, al integrar ambos lados de (1) se llega a la solución.

$$y = \int g(x)dx = G(x) + C$$

en donde $G(x)$ es una antiderivada (o integral indefinida) de $g(x)$,

Ejemplo:

$$\text{Si } \frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

La ecuación (1), y su método de solución, no son más que un caso especial en que f,

Si suponemos que el caso en que $f(x, y) = g(x)h(y)$ es un producto de una función de x por una función de y.

Definición 2.1 (Ecuación separable)

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ es separable, o de variables separables.

Obsérvese que al dividir entre la función $h(y)$, una ecuación separable se puede escribir en la forma:

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad \cdots(2)$$

, de donde por comodidad, $p(y)$ p representa $\frac{1}{h(y)}$.

Así podemos ver de inmediato que la ecuación (2), se reduce a la ecuación (1) cuando $h(1)$.

Ahora bien, si $y=\phi(x)$ representa una solución de (2), se debe cumplir que:

$$\int p(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx=\int g(x)\,dx \qquad \cdots(3)$$

Pero $dy=\phi'(x)\,dx$, de modo que la ecuación (3) es lo mismo que

$$\int p(y)dy=\int g(x)dx \qquad \text{o} \qquad H(y)=G(x)+c, \qquad \cdots(4)$$

En donde $H(y)$ y $G(x)$ so antiderivadas de $p(y)=\dfrac{1}{h(y)}$ y de $g(x)$ respectivamente.

Método de solución.

La ecuación (4) indica el procedimiento para resolver las ecuaciones separables.

Al integrar a ambos lados de $p(y)dy=g(x)dx$ se obtiene una familia monoparamétrica de soluciones, que casi siempre se expresa de manera implícita.

Ejemplo 1 (Solución de une ED separable)

Resolver $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{1+x}$

Solución:

La ecuación anterior es una típica ecuación diferencial de la forma $\dfrac{dy}{dx}=g(x)h(y)$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+1}$$

Integrando:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x+1}\Rightarrow \ln|y|=\ln|x+1|+c_1\Rightarrow y=e^{\ln|x+1|+c_1}\Rightarrow y=|x+1|e^{c_1}$$

$y=|x+1|e^{c_1}\Rightarrow y=C|x+1|$ donde: $C=e^{c_1}$

Ejemplo 02

Resolver: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2y^2}{1+x}$

Solución:

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2y^2}{1+x}\Leftrightarrow\dfrac{1+x}{x^2}dx=y^2dy\Leftrightarrow\int\dfrac{1+x}{x^2}dx=\int y^2dy$ (Separando variables)

$\Leftrightarrow\int y^2dy=\int(x^{-2}+x^{-1})dx$ (Aplicando la integral en ambos miembros).

$\Rightarrow\dfrac{y^3}{3}=-x^{-1}+\ln x+C_1 \quad\Rightarrow\quad y^3=-3x^{-1}+3\ln x+3C_1$,

Si llamamos $C=3C_1$

Luego : $y^3=-3x^{-1}+3\ln x+C$

Ejemplo 03 (Problema de valor inicial.)

Resolver el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$, $y(4)=3$.

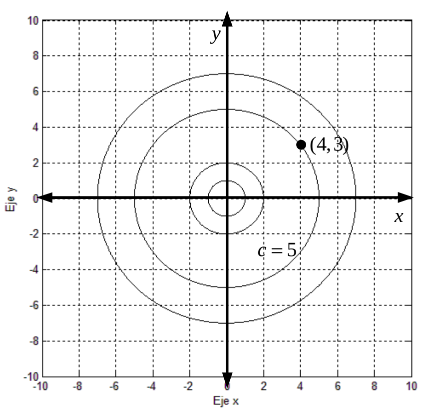
Solución:

Partimos de y: $dy=-x\,dx$ para obtener $\int y\,dy=-\int x\,dx$ y $\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+C_1$

Esta solución se puede escribir en la forma $x^2+y^2=C^2$, si sustituimos la constante $2C_1=C^2$

Vemos que la solución representa una familia de círculos concéntricos.

Cuando $x=4$, $y=3$, de modo que $(4)^2+(3)^2=25=C^2$. Así, el problema de valor inicial determia que $x^2+y^2=25$. De acuerdo con el teorema 1.1 podemos concluir que, es el único círculo de la familia que pasa por el punto $(4,3)$.



Se debe tener cuidado al separar las variables porque los divisores variables podría ser cero en algún punto. Como veremos en los dos ejemplos siguientes, en ocasiones se puede perder una solución constante mientras resolvemos un problema. (Ojo en el problema 58 en loes ejercicios).

Ejemplo 04

Resolver el problema de Valor Inicial

$$(e^{-y}+1)\,\mathrm{sen}x\;dx=(1+\cos x)dy\;,\qquad y(0)=0$$

Solución:

$$\frac{\mathrm{sen}x}{1+\cos x}\,dx=\frac{dy}{e^{-y}+1}\Leftrightarrow\int\frac{dy}{e^{-y}+1}=\int\frac{\mathrm{sen}x}{1+\cos x}\,dx$$

$$\Rightarrow\int\frac{e^{y}\,dy}{e^{y}+1}=-\int\frac{-\mathrm{sen}x}{1+\cos x}\,dx\quad\Rightarrow\ln(e^{y}+1)=-\ln(1+\cos x)+\ln c\qquad\Rightarrow\ln(e^{y}+1)=\ln\left(\frac{c}{1+\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow e^{y}+1=\frac{c}{1+\cos x}\Rightarrow\boxed{e^{y}=\frac{c}{1+\cos x}-1}\cdots(*)$$

De la condición inicial $y(0)=0$, reemplazamos en la solución general $(*)$, se obtiene:

$$e^{0}=\frac{c}{1+\cos(0)}-1\Rightarrow 1=\frac{c}{1+1}-1\Rightarrow\boxed{c=4}$$

Sustituyendo en la solución general $(*)$, obtenemos la solución particular:

$$e^{y}=\frac{4}{1+\cos x}-1$$

Ejemplo 05 (Perdida de una solución)

Resolver

$$xy^{4}dx+(y^{2}+2)e^{-3x}dy=0\qquad\cdots(5)$$

Solución:

Al multiplicar la ecuación por e^{3x} y dividirla entre y^{4} obtenemos

División término a término: $$xe^{3x}dx+\frac{y^{2}+2}{y^{4}}dy=0$$

$$\Rightarrow\qquad xe^{3x}dx+(y^{-2}+2y^{-4})\,dy=0\qquad\cdots(6)$$

En el primer término integramos por partes y

$$\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}-y^{-1}-\frac{2}{3}y^{-3}=C_1$$

La familia monoparamétrica de soluciones también se puede escribir de la forma:

$$e^{3x}(3x-1)=\frac{9}{y}+\frac{6}{y^{3}}+C\qquad\cdots(7)$$

Donde $C=9C_1$

Observación: $y=0$ es una solución correcta de la ecuación (5), pero no es miembro del conjunto que da y en la ecuación (7).

Ejemplo 06 (Problema de valor inicial)

Resolver el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx}=y^{2}-4$, $y(0)=-2$.

Solución: Pasamos la ecuación a la forma:

$$\frac{dy}{y^{2}-4}=dx\qquad\cdots(8)$$

y empleamos el método de fracciones parciales en el lado izquierdo. Entoces

$$\left[\frac{-1/4}{y+2}+\frac{1/4}{y-2}\right]dy=dx\qquad\cdots(9)$$

De modo que: $$-\frac{1}{4}\ln|y+2|+\frac{1}{4}\ln|y-2|=x+C_1\qquad(10)$$

En este caso es fácil despejar y de la ecuación implícita en función de x. Al multiplicar la ecuación por 4 y combinar logaritmos resulta

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+C_2\qquad\text{donde: } 4C_1=C_2$$

y así $\dfrac{y-2}{y+2} = C\,e^{4x}$ donde $e^{c_2} = C$.

Por último, despejamos y de la última ecuación y obtenemos

$$y = 2\frac{1+Ce^{4x}}{1-Ce^{4x}} \qquad \cdots(10)$$

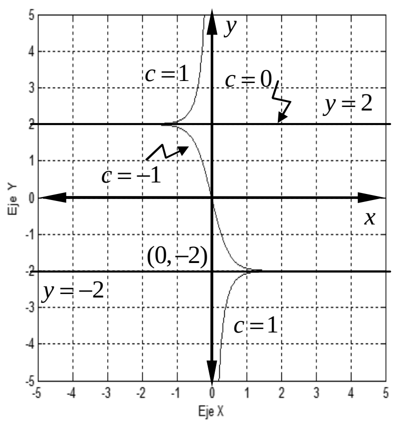
Si sustituimos $x=0$ e $y=-2$y , se presenta el dilema matemático.

$$-2 = 2\frac{1+C}{1-C} \quad \Rightarrow \quad -1+C = 1+C \quad \Rightarrow \quad -1 = 1 \qquad (?)$$

Al llegar a la última igualdad vemos que debemos examinar con más cuidado la ecuación diferencial.
El hecho es que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)(y-2)$$

Queda satisfecha con dos funciones constantes, que son $y=-2$ e $y=2$. Al revisar las ecuaciones (8) , (9) y (10) advertimos que debemos excluir a $y=-2$ y $y=2$ de estos pasos de la solución.
Es interesante observar que después podemos recuperar la solución $y=2$ si hacemos que $C=0$ en la ecuación (11) . Sin embargo, no hay valor finito de C que pueda producir la solución $y=-2$. Esta última función constante es la única solución al problema de valor inicial



Si en el ejemplo 04 hubiéramos empleado $\ln|C|$ como constante de integración la forma de la familia monoparamétrica de soluciones sería

$$\boxed{y = 2\frac{c+e^{4x}}{c-e^{4x}}} \qquad \cdots(12)$$

Obsérvese que la ecuación (12) se reduce a $y=-2$ cuando $C=0$; pero en este caso no hay valor finito de C que pueda dar como resultado la constante $y=2$.

Si al determinar un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden llegamos a una solución particular, la mayoría de los estudiantes (y de los profesores) tenderá a descansar satisfechos.
Pero en la sección 1.2 vimos que una solución de un problema de valor inicial quizá no será única, por ejemplo, en el ejemplo 03 de esa sección el problema

$$\frac{dy}{dx} = x\,y^{1/2}, \qquad y(0)=0 \qquad \cdots(13)$$

Tiene dos soluciones cuando menos, las cuales son $y=0$ y $y=\dfrac{x^4}{16}$. Ahora ya podemos resolver esa ecuación.

Si separamos variables obtenemos $y^{-1/2}\,dy = x\,dx$,

Integrando $2y^{1/2} = \dfrac{x^2}{2} + c_1$ o sea $y = \left(\dfrac{x^2}{4}+c\right)^2$.

Cuando

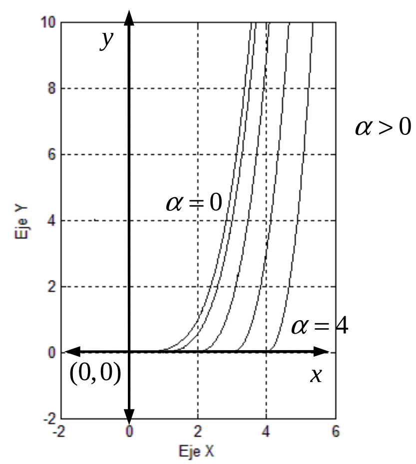
Cuando $x=0$, $y=0$, así que necesariamente $c=0$; por lo tanto, $y=\dfrac{x^4}{16}$.

Se perdió la solución $y=0$ al dividir entre $y^{1/2}$.

Además, el problema de valor inicial , ecuación (13) , tiene una cantidad infinitamente mayor de soluciones porque por cada elección del parámetro $\alpha \ge 0$ la función definida en secciones

$$y = \begin{cases} 0 & , x < \alpha \\ \dfrac{(x^2-\alpha^2)^2}{16} & , x \ge \alpha \end{cases}$$

Satisface al mismo tiempo la ecuación diferencial y la condición inicial



OBSERVACION:

En algunas de los ejemplos anteriores vimos que la constante de la familia monoparamétrica de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden se puede redefinir para mayor comodidad.
También se puede dar con facilidad el caso de que dos personas lleguen a expresiones distintas de las mismas respuestas al resolver en forma correcta la misma ecuación; por ejemplo, separando variables se puede demostrar que familias monoparamétricas de soluciones de:

$$(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0$$

Son $\arctan(x)+\arctan(y)=c$ o $\dfrac{x+y}{1-xy}=c$.

Al avanzar en las siguientes secciones, el lector debe tener en cuenta que las familias de soluciones pueden ser equivalentes, en el sentido de que una puede obtener de otra, ya sea por redifinición de la constante o por transformaciones algebraicas o trigonométricas.

NOTA:

Ecuación de la forma $\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by)$

Si $a=0$ o $b=0$, la ecuación es separable. En otro caso efectuamos el cambio de función $y(x)$ y por

$z(x)$ dado por $z=ax+by$, de donde $z'=a+by'$ y por lo tanto $y'=\dfrac{z'-a}{b}$.

Entonces , sustituyendo en la E.D. obtenemos $\dfrac{z'-a}{b}=f(z)$

Es decir: $\dfrac{dz}{dx}=a+bf(z)$, es de variables separadas. Pues escribimos como

$dx=\dfrac{dz}{a+b\,f(z)}$,

Integrando, $x=\int f(a+bf(z))^{-1}dz=\phi(z,C)$.

Por lo tanto, las soluciones de la E.D. de partida serán $x=\phi(ax+by,C)$,

De modo que hemos encontrado y como función de x expresada en forma implícita.

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}-1$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}+1=e^{x+y} \quad\Rightarrow\quad 1+y'=e^{x+y} \quad \cdots(I)$$

Cambiando de variable: $\boxed{z=x+y}$ $\Rightarrow$ $z'=1+y'$

Luego:

La ecuación (I) se transforma en $z'=e^z$, $\Rightarrow$ $\dfrac{dz}{dx}=e^z$ Es una ecuación en variables separable.

$\Rightarrow$ $dx=e^{-z}\,dz$

Integrando, $x=-e^{-z}+C$

Retornando al cambio de variables: $x=e^{-(x+y)}+C \Rightarrow x=e^{-(x+y)}+C$

$$x-C=e^{-x-y} \Rightarrow -x-y=\ln(x-C)$$

$$\Rightarrow \quad y=-x-\ln|x-C|$$