UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

1

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones en las que contienen derivadas,
Por ejemplo:

$y''+3y'-y=0$ en la que al resolver se debe obtener la función y.

Veamos algunas definiciones y terminologías básicas.

1.1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

Definición 1.1 Ecuación Diferencial

Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Ejemplos

- $\dfrac{dy}{dx}=7x+3$
- $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-k\dfrac{dy}{dx}$
- $\dfrac{d^3y}{dt^3}=e^{-y+3t}+\dfrac{d^2y}{dt^2}$
- $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3-\cos x\dfrac{dy}{dx}=senx$
- $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=0$, donde $\omega=f(x,y,z)$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad.

CLASIFICACIÓN SEGÚN EL TIPO:

a) Ecuación Diferencial Ordinaria. Es aquella ecuación que sólo contienen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.
Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx}+7y=e^x \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$$

b) Ecuación en Derivadas Parciales. Son aquellas ecuaciones que contienen las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes.
Ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial t}=2u-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

CLASIFICACIÓN SEGÚN EL ORDEN:

El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Grado de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

Ejemplo:

- $4x\dfrac{dy}{dx}+3y=5x$ ED de primer orden y 1er grado.
- $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-4y=e^x$ ED de segundo orden y 1er grado
- $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5=5xy$ ED de tercer orden y segundo grado.

Ecuación diferencial ordinaria general de orden n

Es representada mediante. $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \quad \cdots(1)$

También escrita como:

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}...,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

NOTA:
En las explicaciones y demostraciones de este curso supondremos que se pueden despejar la derivada de orden máximo, $y^{(n)}$, de una ecuación diferencial de orden n, como la ecuación (1) ;
Esto es,

$$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$$

CLASIFICACIÓN SEGÚN LA LINEALIDAD O NO LINEALIDAD:

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ es lineal , cuando f es una función lineal de $y,y',...,y^{(n-1)}$.
Es decir que una ecuación es lineal si se pude escribir en la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x).$$

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen dos propiedades características:

i) La variable dependiente y, así como todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.
ii) Cada coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente:

NOTA:
Se llama lineal homogénea si, $g(x)=0$. Dada una ecuación lineal, su correspondiente ecuación lineal homogénea en la que se ha hecho $g(x)=0$ se denomina **lineal homogénea asociada.** Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

Las funciones de y como $sen(y)$ o las funciones de las derivadas de y, como e^x no pueden aparecer en una ecuación lineal.

Ejemplo:
Los siguientes ejemplos son ecuaciones ***<u>diferenciales lineales</u> ordinarias*** de primer, segundo y tercer orden.

$$(y-x)dx+4xdy=0\,,\quad y''-3y'+y=0\,,\quad x^3\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}+6y=e^x$$

Los siguientes ejemplos son ecuaciones **<u>diferenciales no lineales</u>** de primer, segundo y cuarto orden.

$$(1+y)y'+2y=e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2}+sen(y)=0 \quad , \frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$$

Definición 1.2 Solución de una ecuación diferencial

Sea la ecuación diferencial $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$

Diremos que una función $\phi:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con n-ésima derivada, es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo I, cuando una función ϕ al sustituir a la ecuación diferencial, ella la transforma esa ecuación en una identidad.
Es decir:

$\phi:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una solución de la una ecuación diferencial ordinaria
Sí y solo sí,

a) ϕ tiene al menos n derivadas
b) $F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0 \quad \forall\, x\in I$.

Se dice que $y=\phi(x)$ satisface la ecuación diferencial.
El intervalo I puede ser intervalo abierto (a,b), cerrado $[a,b]$, infinito (a,∞), etcétera.

NOTA
Se supone en el curso que ϕ es una función de valores reales.

EJEMPLO 01 **Comprobación de una solución**

Verificar que la función $y = x\int_0^x \frac{sent}{t}dt$, satisface a la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = y + x\ sen(x)$$

SOLUCIÓN
Comprobar que la función dada es una solución es escribir la ecuación diferencial en la forma:

$$x\frac{dy}{dx} - y - x\ sen(x) = 0$$

Calculando:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt + x\left(\frac{sen(x)}{x}\right) \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = x\left[\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt + x\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = x\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt + x sen(x)$$

$$x\frac{dy}{dx} - y - x\,sen(x) = x\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt + x sen(x) - x\int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt - x\,sen(x) = 0$$

EJEMPLO 02 **Comprobación de una solución**

Comprobar que $y = \frac{x^4}{16}$ es una solución de la ecuación no lineal $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

SOLUCIÓN

Una manera de comprobar que la función dada es una solución es escribir la ecuación diferencial en la forma $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$, y comprobar al sustituir, si la suma $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2}$ es cero para todo x en el intervalo.

Como: $\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$ y $y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4}$

Notar que: $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$, para todo número real.

Observación: $y^{1/2} = \frac{x^2}{4}$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $\frac{x^4}{16}$

EJEMPLO 03 **Comprobación de una solución**

La función $y = xe^x$ es una solución de la ecuación lineal $y'' - 2y' + y = 0$
en el intervalo $(-\infty, \infty)$

SOLUCIÓN
Sustituimos $y' = xe^x + e^x$ y $y'' = xe^x + 2e^x$
en $y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + (xe^x) = xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x = 0$
Para todo número real.

NOTA.
No toda ecuación diferencial que se nos ocurra tiene, necesariamente, una solución. Para resolver el problema.

SOLUCIONES EXPLICITAS E IMPLÍCITAS

SOLUCIÓN EXPLÍCITA. Una solución en que la variable dependiente se expresa tan solo en términos de la variable independiente y constantes

Una solución explícita de una ecuación diferencial, que es idéntica a cero en el intervalo I, se llama **Solucion Trivial.**

SOLUCIÓN IMPLICITA. Se denomina así a una relación $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación (1), en un intervalo I, siempre y cuando exista al menos una función ϕ que satisfaga la relación, y la ecuación diferencial, en I. En otras palabras, $G(x, y) = 0$ define implícitamente a la función ϕ.

EJEMPLO 04 **Comprobación de una solución implícita**

La relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \cdots(2)$$

en el intervalo $-2 < x < 2$

Solución:

Derivando implícitamente obtenemos $\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}(0) \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

Al despejar el símbolo $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Además, se debe comprobar que las funciones $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$, satisfacen la relación. $x^2 + y_1^2 - 4 = 0$ y $x^2 + y_2^2 - 4 = 0$) y son soluciones de la ecuación diferencial en $-2 < x < 2$.

NOTA:
Toda relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisface ***formalmente*** la ecuación (2) para cualquier constante c; sin embargo, se sobre entiende que la relación siempre debe tener sentido en el sistema

de los número reales. Así por ejemplo, no podemos decir que $x^2+y^2+4=0$ sea una solución implícita de la ecuación. (¿Porqué no?)

Debe quedar intuitivamente clara la distinción entre una solución explícita y una implícita, porque en lo sucesivo ya no haremos la aclaración "es una solución explícita (o implícita)".

EJEMPLO 05 **Comprobación de una solución implícita**

Verificar que la solución $x=y+\ln y$, satisface a la ecuación diferencial

$$y\,y''+(y')^3-(y')^2=0$$

SOLUCIÓN

Como: $x=y+\ln y$, derivando implícitamente $1=y'+\frac{1}{y}y'$ $\Rightarrow$ $1=y'\left(1+\frac{1}{y}\right)$ $\Rightarrow$

$y=y'(y+1)$ $\Rightarrow$ $y+1=\frac{y}{y'}$ derivando $y'=\frac{y'y'-y\,y''}{(y')^2}$ $\Rightarrow$ $(y')^3=(y')^2-y\,y''$

$\Rightarrow$ $y\,y''+(y')^3-(y')^2=0$

EJEMPLO 06 **Comprobación de una solución implícita**

Dada la función $y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt$, satisface a la ecuación diferencial

$$y(1+\ln y)y''+(y')^2=2\,x\,y\,e^{x^2}$$

SOLUCIÓN

Ya que $y\ln y=x+\int_0^x e^{t^2}dt$ derivando implícitamente,

$\Rightarrow$ $y'\ln y+y\left(\frac{y'}{y}\right)=1+e^{x^2}$

$\Rightarrow$ $(\ln y+1)\,y'=1+e^{x^2}$, derivando,

$\Rightarrow$ $\left(\frac{y'}{y}\right)y'+(\ln y+1)\,y''=2\,x\,e^{x^2}$

$\Rightarrow$ $(y')^2+y(\ln y+1)\,y''=2xy\,e^{x^2}$ $\Rightarrow$ $y(1+\ln y)y''+(y')^2=2\,x\,y\,e^{x^2}$

NOTAS:
A veces, a una solución de una ecuación diferencial ordinaria se le llama ***integral de la ecuación*** y a su gráfica, ***curva integral*** o ***curva de solución***.

Al resolver una ecuación diferencial de primer orden $F(x,y,y')=0$, por lo general obtenemos una solución con una sola constante arbitraria, o parámetro c. Una solución constante arbitraria representa un conjunto $G(x,y,c)=0$ de soluciones y se llama **monoparamétrica** de soluciones

Al resolver una ecuación diferencial de orden n, $F(x,y,y',...y^{(n)})=0$, se busca una familia n-parmétrica de soluciones $G(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$.

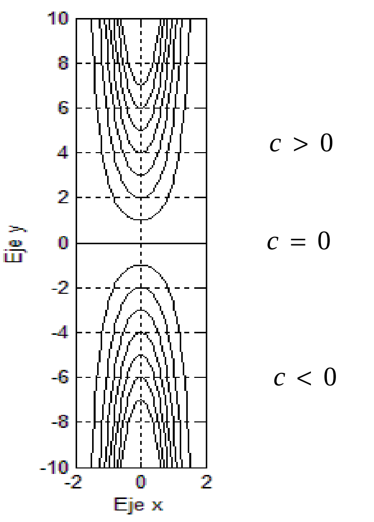
Esto sólo quiere decir que una solo ecuación diferencial pude tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las ilimitadas del parámetro o parámetros.

SOLUCIÓN PARTICULAR.- Es una solución de una ecuación diferencial que no tiene parámetros arbitrarios.

Ejemplo 1:
Podemos demostrar que, por sustitución directa, toda familia monparametrica $y=ce^{x^2}$ también satisface la ecuación $\frac{dy}{dx}=2xy$

La solución original $y=e^x$ corresponde a $c=1$ que es una solución particular de la ecuación.

$\boxed{y = c e^{x^2}}$



En la figura anterior se muestra algunas de las curvas integrables de esta familia.
La solución trivial $y=0$ corresponde a $c=0$ (también es una solución particular)

Ejemplo 2:
Encontrar la ecuación diferencial de la familia de parábolas las que tienen sus vértices en el origen y sus focos sobre el eje y

Solución:

La ecuación de la familia de parábolas es: $x^2 = 4py \qquad \cdots(1)$

Donde el vértice es $V(0,0)$ y el foco $F(0,p)$.

El parámetro p lo eliminamos derivando $\dfrac{x^2}{y} = 4p$, obteniéndose $\dfrac{2xy - x^2y'}{y^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{x(2y-xy')}{y^2} = 0 \Rightarrow x(2y-xy') = 0 \Rightarrow \cancel{x=0} \ \vee \ 2y - xy' = 0$$

$$\Rightarrow 2y - xy' = 0$$

Ejemplo 3 Soluciones particulares

Hallar la ecuación diferencial de la función $y = c_1\ e^x + c_2\ e^{-x}$

Solución:

La curva dada por $y = c_1\ e^x + c_2\ e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones

Y es la solución de una ecuación diferencial $y'' - y = 0$

Mostramos algunas soluciones particulares:

Si $c_1 = c_2 = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$ (solución trivial)

$c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \ \Rightarrow \ y = e^x$

$c_1 = 5 \quad c_2 = -2 \ \Rightarrow \ y = 5e^x - 2e^{-x}$

Ejemplo 3 Uso de distintos símbolos

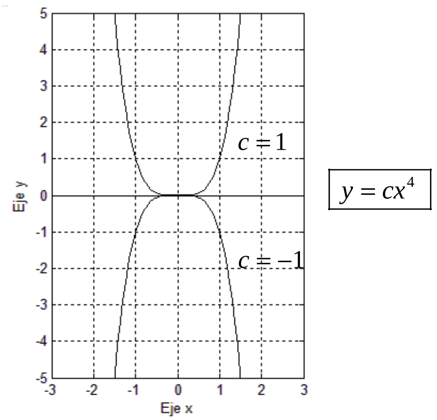
Las funciones $x = c_1 \cos(4t)$ y $x = c_2 sen(4t)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias

Son soluciones de la ecuación diferencial: $x'' + 16x = 0$.
Podemos comprobar, en ambos casos:

Por último, es fácil comprobar también que la combinación lineal de soluciones anteriores, es también solución de la ecuación diferencial $x = c_1\cos(4t) + c_2 sen(4t)$ (familia biparamétrica).

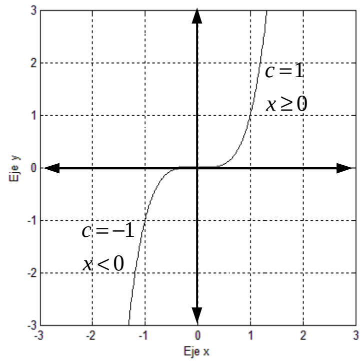
Ejemplo 4 Uso de distintos símbolos

La función $y = cx^4$ (familia monoparamétrica)



es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$

La función definida por tramos: $y = \begin{cases} -x^4 & , x < 0 \\ x^4 & , x \geq 0 \end{cases}$ es una solución particular de la ecuación, pero no se puede obtener a partir de la familia $y = cx^4$ escogiendo sólo la una c (ver la figura siguiente)



SOLUCIÓN SINGULAR.- Es una solución que no se puede obtener particularizando algunos de los parámetros en una familia de soluciones de una ecuación diferencia.

Ejemplo: Solución singular

Podemos demostrar $y=\left(\frac{x^2}{4}+c\right)^2$ proporciona una familia monoparamétrica de soluciones de $y=xy^{1/2}$

Cuando $c=0$, la solución particular resulta $y=\frac{x^4}{16}$

Pero, la solución trivial $y=0$ es una solución singular de la ecuación, porque no se puede obtener partiendo de la familia y eligiendo algún valor del parámetro c.

SOLUCIÓN GENERAL

Si toda solución de una ecuación de orden n, $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ en un intervalo I, se puede obtener partiendo de una familia n-paramétrica $G(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$ con valores adecuados de los parámetros c_i $(i=1,2,...,n)$, se dice que la familia es la **SOLUCIÓN GENERAL** de la ecuación diferencial.

Al resolver las ecuaciones diferenciales lineales vamos a imponer restricciones relativamente sencillas a los coeficientes de esas ecuaciones. Con estas restricciones siempre nos aseguraremos no sólo de que exista una solución en un intervalo sino también de que una familia de soluciones contenga todas las soluciones posibles.

Las ecuaciones no lineales, a excepción de algunas de primer orden, son difíciles de resolver – e incluso resulta irresolubles- en términos de las funciones elementales comunes (combinaciones finitas de potencias o raíces enteres de x, de funciones exponenciales y logarítmicas, o funciones trigonométricas o trigonométricas inversas). Además, si en cierto momento nos encontramos con una familia de soluciones de una ecuación no lineal, no es obvio cuando la familia es una solución general.

NOTA:
Por lo anterior, y en un nivel práctico, el nombre de **"solución general"** sólo se aplica a la ecuaciones diferenciales lineales.

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Hasta ahora hemos descrito ecuaciones diferenciales aisladas con una función desconocida; pero muchas veces, en teoría y en muchas aplicaciones, debemos manejar **sistemas** de ecuaciones diferenciales.
Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de dos o más ecuaciones donde aparecen las derivadas o más funciones desconocidas de una sola variable independiente; por ejemplo , si x y y representan variables dependientes y t es la variable independiente,

$$\frac{dx}{dt}=3x-4y \qquad \frac{dy}{dt}=x+y$$

Es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

Una solución de un sistema como el anterior es una par de funciones diferenciables $x=\phi_1(t)$, $y=\phi_2(t)$, que satisface cada ecuación del sistema en algún intervalo común I.

OBSERVACIÓN:

Es necesario exponer algunos conceptos finales acerca de las soluciones implícitas de las ecuaciones diferenciales. A menos que sea importante o adecuado, por lo general no es necesario tratar de **despejar** y de una solución implícita, $G(x,y)=0$, para que aparezca una forma explícita en términos de x.

En el ejemplo04 podemos despejar fácilmente y de la relación $x^2+y^2-4=0$, en términos de x para llegar a las dos soluciones.
$y_1=\sqrt{4-x^2}$ y $y_2=-\sqrt{4-x^2}$, de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$; pero no debemos engañarnos con esta único ejemplo.

Una solución implícita $G(x,y)=0$ puede definir una función ϕ perfectamente diferenciable que sea una solución de una ecuación diferencial; pero incluso así resulte imposible despejar en $G(x,y)=0$ con métodos analíticos como los algebraicos.

Por ejemplo si la ecuación implícita fuera $xe^{2y}-\operatorname{sen}(xy)+y^2+c=0$ una solución implícita de una ecuación diferencial de primer orden, el despejar y de esta ecuación en términos de x, presenta más problemas que el tedio de manipular símbolos, ya que no es posible.