UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

SERIES DE FOURIER

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

4

Las definiciones y propiedades mencionadas en este capitulo corresponden a la noción teoría de distribuciones. Solo haremos algunos conceptos que serán de forma particular.

ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

Sea $\Omega = \langle a,b \rangle$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Definición:

Por $D(\Omega)$ se representa el espacio de todas las funciones en Ω, con soporte compacto, con derivada parciales continuas de todos los ordenes.

$$D(\Omega) = \{ \ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \phi \text{ es infinitamente diferenciable en } \langle a,b \rangle,\ \phi(t) = 0,\ \forall\ t \notin \langle a,b \rangle \ \}$$

Los elementos de $D(\Omega)$ se denominan funciones de prueba, es frecuente denotarlas con C_0^∞

CONJUNTO DE LAS FUNCIONES LINEALES

Definición:
Se denomina espacio de distribuciones sobre Ω, $D'(\Omega)$, al dual topológico de $D(\Omega)$, es decir, el espacio de las funciones lineales continuas sobre $D(\Omega)$.
Es decir:

$$D'(\Omega) = \{ \ T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \,/\, T \text{ es una función lineal } \}$$

Definición:

Para toda $f \in D'(\Omega)$, diremos que:

$$\int_a^b f(t)\,\phi(t)\,dt = 0 \quad \forall\ \phi(t) \text{ una función de prueba } \Leftrightarrow \quad f(t) = 0 \text{ en } \forall t \in \langle a,b \rangle$$

DERIVACIÓN EN EL SENTIDO DE LAS DISTRIBUCIONES

Sea función $f \in D'(\Omega)$

En la expresión siguiente: $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)dt$, si aplicamos el método por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} u &= \phi(t) & dv &= f'(t)dt \\ du &= \phi'(t)dt & v &= f(t) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)dt = f(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)dt$$

Se conoce la función de prueba $\phi(t)$ es tal que se anula fuera de algún intervalo, es decir es cero en $t = \pm\infty$.

Se tiene: $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi'(t)dt$

Definición:

Sea $f \in D'(\Omega)$ una distribución, se define la derivada de f respecto a t , en el sentido de las distribuciones $\frac{df}{dx}$, como la siguiente distribución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t}\,\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\,dt$$

$\forall\ \phi(t)$ función de prueba. Denotaremos: $f'(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}$

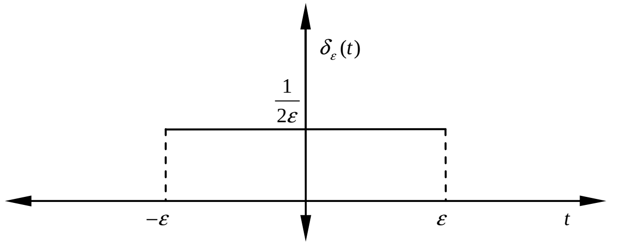
FUNCION IMPULSO UNITARIO (DELTA DE DIRAC)

La función impulso unitario $\delta(t)$, conocido también como función Delta de Dirac, puede definirse de varias maneras, generalmente se expresa mediante la relación.

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & ,\ \text{si } |\,t\,| < \varepsilon \\ 0 & ,\ \text{si } |\,t\,| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Y la función $\delta(t)$ queda expresada por: $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\ dt = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \underbrace{\delta_\varepsilon(t)}_{=0}\ dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\delta_\varepsilon(t)}_{=\frac{1}{2\varepsilon}}\ dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \underbrace{\delta_\varepsilon(t)}_{=0}\ dt = \frac{1}{2\varepsilon}\ t\ \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon}\ (\varepsilon - (-\varepsilon)) = 1$$



Luego la función $\delta(t)$ se definirá por la relación: $\delta(t) = \begin{cases} 0\ , & si\ t \neq 0 \\ \infty\ , & si\ t = 0 \end{cases}$

Además: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\ dt = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \phi(t)\ dt = \phi(0)$

PROPIEDADES:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ \phi(t)\ dt = \phi(t_0)$ ϕ es una función de prueba

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)\ dt = \dfrac{1}{|a|}\phi(0)$ $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

3) Si $g(t)$ es continua en $\langle a,b \rangle$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ g(t)\ dt = \begin{cases} g(t_0) & ,\ t_0 \in \langle a,b \rangle \\ 0 & ,\ t_0 \notin \langle a,b \rangle \end{cases}$$

4) Si $a<b$, demostrar que: $\int_{a}^{b} \delta(t-t_0)\ dt = \begin{cases} 1 & ,\ t_0 \in \langle a,b \rangle \\ 0 & ,\ t_0 \notin \langle a,b \rangle \end{cases}$

5) Para todo $\phi(t)$ es una función de prueba, si $g(t)$ y $h(t)$ son continuas en $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

$g(t)=h(t)$ en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t)\,dt$

6) Demostrar que:

a) Si $f(t)$ es una función continua en $t=0$

$\Rightarrow$ $f(t)\ \delta(t) = f(0)\ \delta(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

b) $t\ \delta(t)=0$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

c) $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

d) $\delta(-t)=\delta(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$ **($\delta(t)$ es una función par)**

Demostración:

1) Haciendo el cambio de variable $\boxed{t-t_0=z}$, tenemos: $t=t_0+z$, $dt=dz$

$t \to +\infty \Rightarrow z \to +\infty$ y $t \to -\infty \Rightarrow z \to -\infty$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\ \phi(t_0+z)\ dz = \phi(t_0+z)\Big|_{z=0} = \phi(t_0)$$

2) Haciendo el cambio de variable $\boxed{at=z}$, tenemos $dt=\dfrac{dz}{a}$,

Si ($\boxed{a>0}$ y $-\infty<t<+\infty$) $\Rightarrow$ $-\infty<at<+\infty$ $\Rightarrow$ $-\infty<z<+\infty$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\ \phi\left(\frac{z}{a}\right)\ \frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\ \phi\left(\frac{z}{a}\right)\ dz = \frac{1}{a}\phi\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{a}\phi(0)$$

Si ($\boxed{a<0}$ y $-\infty<t<+\infty$) $\Rightarrow$ $+\infty<at<-\infty$ $\Rightarrow$ $+\infty<z<-\infty$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)\ dt = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(z)\ \phi\left(\frac{z}{a}\right)\ \frac{dz}{a} = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\ \phi\left(\frac{z}{a}\right)\ dz = -\frac{1}{a}\phi\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{a}\phi(0)$$

En consecuencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ \phi(t)\ dt = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

3) Haciendo $\phi(t) = \begin{cases} g(t) & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases}$ y utilizando la parte 1) , se verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ g(t)\ dt = \phi(t_0) = \begin{cases} g(t_0) & ,\ t_0 \in \langle a,b \rangle \\ 0 & ,\ t_0 \notin \langle a,b \rangle \end{cases}$$

4) Haciendo $\phi(t) = \begin{cases} 1 & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases}$ y utilizando la parte 1), tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ g(t)\ dt = \phi(t_0) = \begin{cases} 1 & ,\ t_0 \in \langle a,b \rangle \\ 0 & ,\ t_0 \notin \langle a,b \rangle \end{cases}$$

5) Sea $\phi(t)$ una función de prueba, hacemos $f(t)=g(t)-h(t)$ es continua $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$g(t)=h(t)$ en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Llamando $f(t)=g(t)-h(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)-h(t)]\phi(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\phi(t)\,dt$

6) Sea $\phi(t)$ una función de prueba, y $f(t)$ es continua, se tiene $f(t)\phi(t)$ es una función de prueba

a) $\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\delta(t)]\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[f(t)\phi(t)]\ dt = f(0)\phi(0)$ Por la parte 1)

$$= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(0)\delta(t)]\phi(t)\ dt$$

Luego: $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

b) Tomando $f(t)=t$, $\Rightarrow t\ \delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t)\,dt = \dfrac{1}{|a|}\phi(0) = \dfrac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \phi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\delta(t)\right)\phi(t)\ dt$

Luego: $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ $\forall t \in \langle a,b \rangle$

d) De la parte anterior $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ si tomamos $a=-1$, se verifica:

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|}\delta(t) \Rightarrow \delta(-t)=\delta(t) \quad \forall t \in \langle a,b \rangle$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIÓN δ

En particular, podemos decir:

La derivada de la función $\delta(t)$ $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\, \phi(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\; \phi'(t) dt = -\phi'(0)$

Notación: $\delta'(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$, además: $\phi'(0) = \left.\dfrac{d\phi}{dt}\right|_{t=0}$

Calculando las derivadas de orden superior:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\; \phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\; \phi''(t)dt = \phi''(0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'''(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)\; \phi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\; \phi''(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\; \phi'''(t)dt = -\phi'''(0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(4)}(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(3)}(t)\; \phi'(t)dt = \phi^{(4)}(0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(5)}(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(4)}(t)\; \phi'(t)dt = -\phi^{(5)}(0)$$

Definición: La derivada de orden superior de la función delta de Dirac $\delta(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)dt = (-1)^n \phi^{(n)}(0)}$$

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS DE LA FUNCION δ

a) Si $f(t)$ es una función continua y diferenciable, $(f(t)\delta(t))' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$

b) Demostrar que: $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$

c) Demostrar que: $\mu'(t) = \delta(t)$ (δ es la derivada de la función escalón unitario $\mu(t)$)

Además: $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\,\phi'(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt$

Prueba:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)\cdot f(t)]'\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)\cdot f(t)]\phi'(t)\;dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[\,f(t)\cdot\phi'(t)]\;dt$

Como: $f(t)\,\phi'(t) = [\,f(t)\,\phi(t)]' - f'(t)\,\phi(t)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)\cdot f(t)]'\,\phi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot\Big(\,[\,f(t)\,\phi(t)]' - f'(t)\,\phi(t)\,\Big)dt\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot[\,f(t)\,\phi(t)]'\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot[\,f'(t)\,\phi(t)]\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\cdot[\,f(t)\,\phi(t)]\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)\;f'(t)\,]\cdot\phi(t)\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(t)\;f(t)\,]\cdot\phi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)\;f'(t)\,]\cdot\phi(t)\,dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(t)\;f(t) + \delta(t)\;f'(t)\,]\cdot\phi(t)\,dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $[\delta(t)\cdot f(t)]' = \delta'(t)\;f(t) + \delta(t)\;f'(t)$

b) De la demostración anterior: $f(t)\delta'(t) = [\,f(t)\delta(t)]' - f'(t)\delta(t)$

Se ha probado: $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ en casi todo punto $t \in \mathbb{R}$, aplicando

- $f'(t)\delta(t) = f'(0)\delta(t)$
- $[\,f(t)\delta(t)]' = [\,f(0)\,\delta(t)]' = f(0)\,\delta'(t)$

Reemplazando, tenemos: $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$

c) De la definición de derivable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)\,\phi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\,\phi'(t)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt \qquad \text{definición de escalón unitario}$$

$$= -\left[\phi(\infty) - \phi(0)\right] \qquad \text{pues } \phi(\infty) = 0$$

$$= \phi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt$$

Tomando los extremos: $\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t)\,\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\phi(t)\,dt$

Por lo tanto: $\mu'(t) = \delta(t)$, lo que es lo mismo $\mu'(t) = \dfrac{d(\mu(t))}{dx} = \delta(t)$

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(t)\,\phi'(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt$$

EJERCICIO

Evaluar :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\, e^{t} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt$

b) $\int_{1}^{3} \delta(t-5)\, e^{-t}\, dt$

c) $\int_{1}^{3} \delta(t-2)\, e^{-t}\, dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) \left(\frac{1}{a^2 t^2 - b^2}\right) dt$

Solución:

a) Por propiedad de delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\, e^{t} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt = \phi(2) \qquad \text{donde:} \qquad \phi(t) = e^{t} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right)$$

Por lo tanto: $\phi(2) = e^{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} 2\right) = e^{2} \cos(n\pi) = e^{2} (-1)^{n}$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\, e^{t} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right) dt = e^{2} (-1)^{n}$$

b) Es evidente que: $\int_{1}^{3} \delta(t-5)\, e^{-t}\, dt = 0$ pues, $t_0 = 5 \notin \,<1,3>$

c) Por propiedad del delta de Dirac:

$$\int_{1}^{3} \delta(t-2)\, e^{-t}\, dt = \phi(2) \qquad \text{donde:} \qquad \phi(t) = e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{1}^{3} \delta(t-2)\, e^{-t}\, dt = e^{-2}$$

d) Tomando a $\phi(t)=\dfrac{1}{a^2t^2-b^2}$

Entonces, expresando en funciones parciales

$$\phi(t)=\frac{1}{a^2t^2-b^2}=\frac{1}{(at)^2-b^2}=\frac{1}{(at+b)(at-b)}=\frac{A}{at-b}+\frac{B}{at+b}$$

$$A=\lim_{t\to\frac{b}{a}}\frac{1}{at+b}=\frac{1}{2b} \qquad \text{y} \qquad B=\lim_{t\to-\frac{b}{a}}\frac{1}{at-b}=-\frac{1}{2b}$$

$$\phi(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{at-b}-\frac{1}{at+b}\right)$$

Derivando, consecutivamente, tenemos:

$$\phi'(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{-a}{(at-b)^2}-\frac{-a}{(at+b)^2}\right)$$

$$\phi''(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{1\cdot 2\cdot a^2}{(at-b)^3}-\frac{1\cdot 2\cdot a^2}{(at+b)^3}\right)$$

$$\phi'''(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3}{(at-b)^4}-\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3}{(at+b)^4}\right)$$

$$\phi^{(iv)}(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^4}{(at-b)^5}-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^4}{(at+b)^5}\right)$$

Así, sucesivamente: $\phi^{(n)}(t)=\dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot a^n}{(at-b)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot a^n}{(at+b)^{n+1}}\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi^{(n)}(t)=\frac{1}{2b}\left(\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(at-b)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(at+b)^{n+1}}\right)}$$

$$\phi^{(n)}(0)=\frac{1}{2b}\left(\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(-b)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(b)^{n+1}}\right)=\frac{1}{2b}\left(-\frac{n!\,a^n}{b^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!\,a^n}{b^{n+1}}\right)=\frac{n!\,a^n}{2b^{n+2}}\left(-1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \phi^{(n)}(0)=\frac{n!\,a^n}{2b^{n+2}}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\left(\frac{1}{a^2t^2-b^2}\right)dt=\frac{n!\,a^n}{2b^{n+2}}\left((-1)^{n+1}-1\right)$$

FUNCIÓN ESCALONADA UNITARIA

Recordando:

La función generalizada (o función simbólica) $\mu(t)$ se conoce como la función unitaria de Heaveside o función escalonada, definida por:

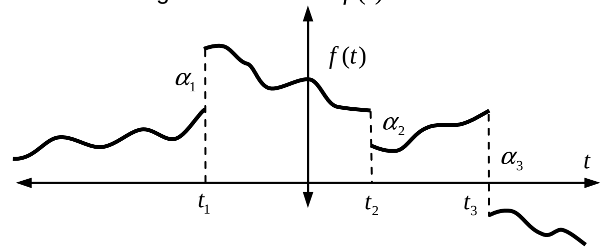
$$\mu(t)=\begin{cases}0 & ,\ para\ \ t<0\\ 1 & ,\ para\ \ t>0\end{cases}$$

NOTA: La función $\mu(t)$ no está definida para $t=0$.

La derivada $\mu(t)$ vale cero en valores $t>0$ y $t<0$.

PROBLEMA

Si $f(t)$ es una función continua por tramos con discontinuidad súbitas $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ en $t_1,\ t_2,\ t_3$, como se muestra en la figura y la función $f'(t)$ está definida en todas partes excepto estas discontinuidades de número finito encontrar la derivada generalizada de $f(t)$.



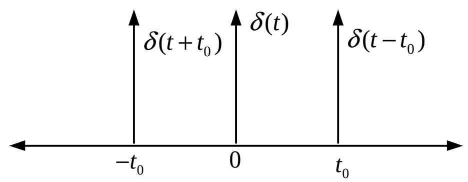
Solución:

Se tiene: $\alpha_i = f(t_i^+)-f(t_i^-)=\lim_{t\to t_0^+} f(t)-\lim_{t\to t_0^-} f(t)$

Cuando:

$\alpha_i>0$, entonces los impulsos son hacia arriba.

$\alpha_i<0$, entonces los impulsos son hacia abajo.



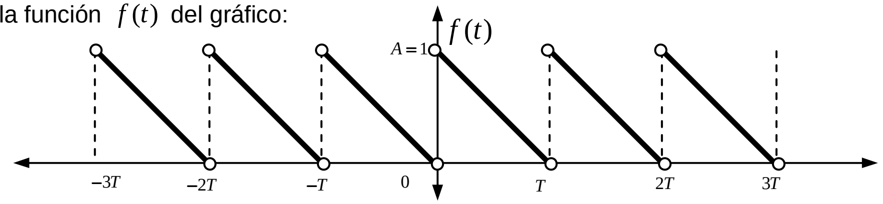
Consideremos la función $g(t)=f(t)-\sum_k \alpha_k\ \mu(t-t_k)$ donde: $\mu(t-t_k)=\begin{cases}0 & ,\ para\ \ t<t_k\\ 1 & ,\ para\ \ t>t_k\end{cases}$

Se tiene $g(t)$ es continua en todas partes y su derivada es igual a $f'(t)$ excepto en un número finito de puntos, donde:

$$g'(t)=f'(t)-\sum_k \alpha_k\ \mu'(t-t_k) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{g'(t)=f'(t)-\sum_k \alpha_k\ \delta(t-t_k)}$$

Ejemplo:

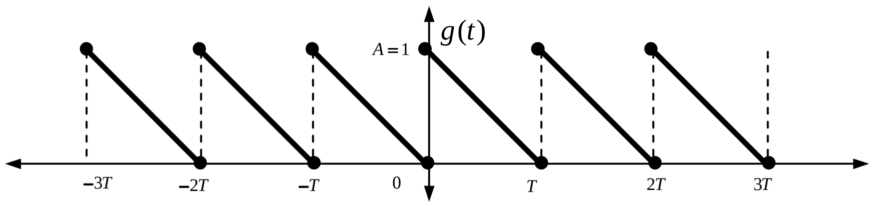
Sea la función $f(t)$ del gráfico:



La serie de Fourier es : $f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \mathrm{sen}(n\omega_0 t)$

$$f'(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_0\cos(n\omega_0 t) \quad\Rightarrow\quad f'(t)=\frac{\omega_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(t)=\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)}\cdots(\alpha)$$



Consideramos $g(t)=-\frac{1}{T}(t-T)$ se tiene: $g'(t)=-\frac{1}{T}$

También se puede escribir: $g(t)=f(t)-\sum_k \alpha_k\ \mu(t-t_k)$

Además: $\alpha_k = A = 1$, $t_k = kT$, reemplazando $g(t)=f(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty} A\,\mu(t-kT)$

Tomando la derivada: $g'(t)=f'(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu'(t-kT)$

$g'(t)=f'(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ Pues $\mu'(t)=\delta(t)$.

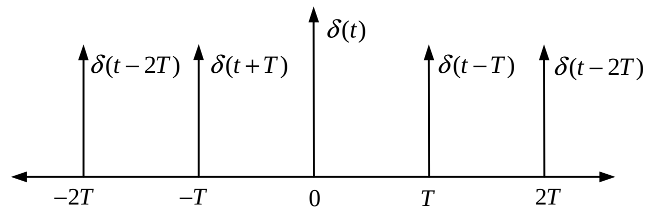
$$f'(t)=g'(t)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(t)=-\frac{1}{T}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)}\cdots(\beta)$$

De (α) y (β) igualando se tiene:

$$-\frac{1}{T}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t) \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)$$

El sumando de la derecha es la Serie Trigonométrica de Fourier (S.T.F.)

A la función lo denotaremos por: $\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ se le denomina el "Tren Periódico de Impulso Unitario".



Recordar $\boxed{T=2p}$

OBSERVACIÓN

Deducir la serie de Fourier de $\delta_T(t)$ que es una función periódica, de periodo $T=2p$

Sea: $\delta_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]$

Donde: $a_0=\frac{1}{p}\underbrace{\int_{-p}^{p}\delta_T(t)\,dt}_{=1}=\frac{1}{p} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_0=\frac{1}{p}}$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\delta_T(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\delta(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{1}{p}\cos(n\omega_0 t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{p}$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\delta_T(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\delta(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt=\frac{1}{p}\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\Big|_{t=0}=0$$

Por lo tanto: $\delta_T(t)=\frac{\left(\frac{1}{p}\right)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)\cos(n\omega_0 t) \Rightarrow$

$$\boxed{\delta_T(t)=\frac{1}{2p}+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)}$$

EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER POR DIFERENCIACIÓN

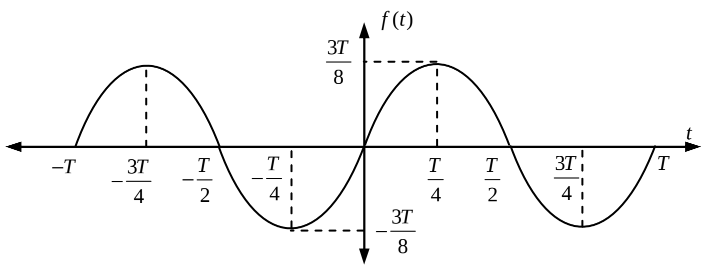
Para facilitar el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier para ciertas funciones, se usa la función δ junto con la diferenciación.

Ejemplo 01:

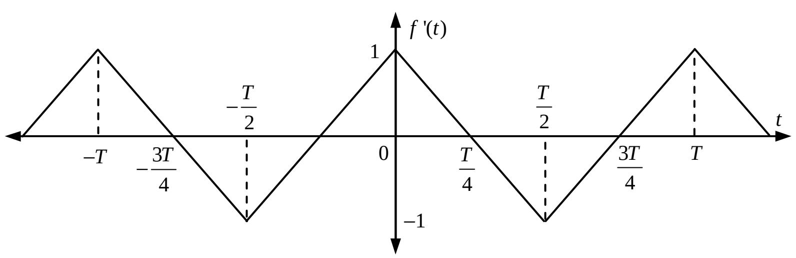
Utilizando la serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios, hallar la serie de Fourier para la función

$$f(t)=\begin{cases} t+\dfrac{2}{T}t^2 & ,\text{si } -\dfrac{2}{T}<t\le 0 \\ t-\dfrac{2}{T}t^2 & ,\text{si } 0<t<\dfrac{2}{T} \end{cases}$$

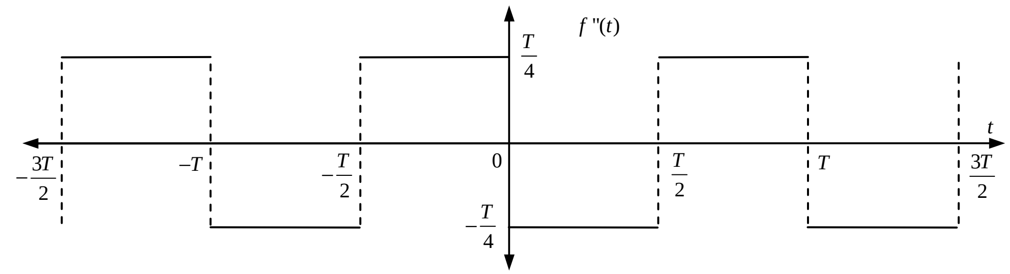
Solución:

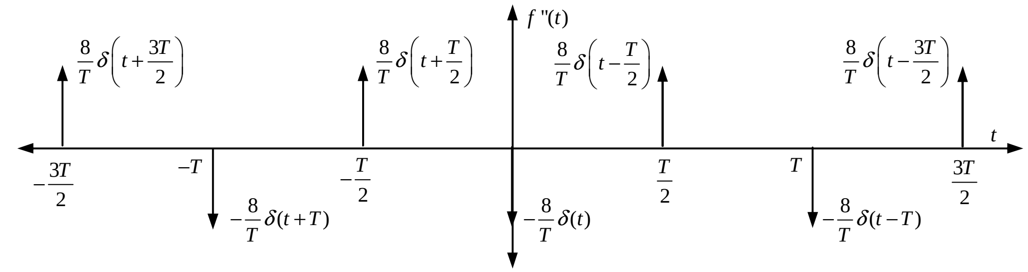


$$f'(t)=\begin{cases} t+\dfrac{4}{T}t & ,\text{si } -\dfrac{2}{T}<t\le 0 \\ t-\dfrac{4}{T}t & ,\text{si } 0<t<\dfrac{2}{T} \end{cases}$$



$$f''(t)=\begin{cases} \dfrac{4}{T} & ,\text{si } -\dfrac{2}{T}<t\le 0 \\ -\dfrac{4}{T} & ,\text{si } 0<t<\dfrac{2}{T} \end{cases}$$





$$f'''(t)=\frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-(2n-1)\frac{T}{2}\right)-\frac{8}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT\right)$$

$$=\frac{8}{T}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\left[t+\frac{T}{2}\right]-nT\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT\right)\right]$$

$$=\frac{8}{T}\left[\frac{1}{T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\cos\left(n\omega_0(t+\frac{T}{2})\right)-\left[\frac{1}{T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{T}\cos(n\omega_0 t)\right]\right]$$

$$=\frac{16}{T^2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}(t+\frac{T}{2})\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2n\pi}{T}t)\right] \qquad \text{pues, } \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$=\frac{16}{T^2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(n\omega_0 t+n\pi\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(n\omega_0 t)\right] \qquad \text{pues, } \cos(u+n\pi)=(-1)^n\cos(u)$$

$$=\frac{16}{T^2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\cos(n\omega_0 t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'''(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{16}{T^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos(n\omega_0 t)}\cdots(*)$$

Como $f(t)$ es impar $\Rightarrow f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$

Derivando: $f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\omega_0\, b_n \cos(n\,\omega_0 t)$

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\ \omega_0^2\, b_n)\operatorname{sen}(n\,\omega_0 t)$$

$$\boxed{f'''(t)=\sum_{n=1}^{\infty} (-n^3\ \omega_0^3\, b_n)\cos(n\,\omega_0 t)}\cdots(**)$$

Comparando $(*)$ y $(**)$ se tiene:

$$-n^3\ \omega_0^3\, b_n=\frac{16}{T^2}\left[(-1)^n-1\right] \qquad \Rightarrow \qquad b_n=\frac{16}{n^3\ \omega_0^3\, T^2}\left[1-(-1)^n\right] \text{ pues, } \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n=\frac{2T}{n^3\ \pi^3}\left[1-(-1)^n\right]}$$

Tenemos:

$$b_{2n}=0 \qquad \text{y} \qquad b_{2n-1}=\frac{4T}{(2n-1)^3\ \pi^3} \qquad \forall\ n=1,2,3,\cdots$$

Es decir: $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4T}{(2n-1)^3\ \pi^3}\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$

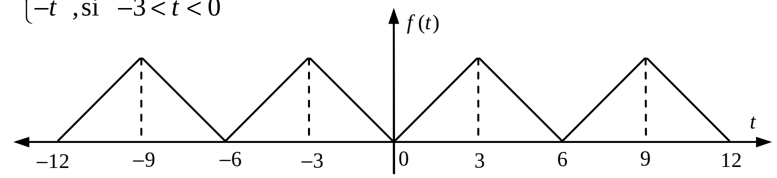
Lo podemos escribir, como:

$$\boxed{f(t)=\frac{4T}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{(2n-1)^3}} \qquad \text{donde:} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

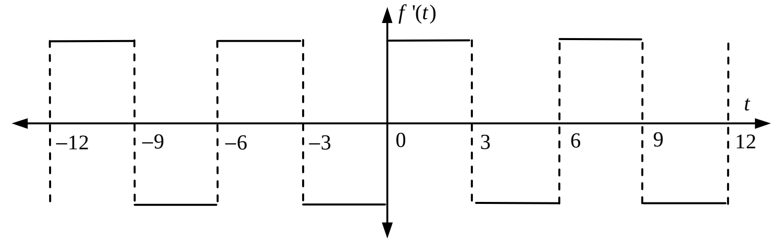
Ejemplo 02:

Hallar la serie de Fourier de la función $f(t)=|\,t\,|$, con $-3<t<3$ (periódica), usando la serie de Fourier del tren de impulsos unitarios.

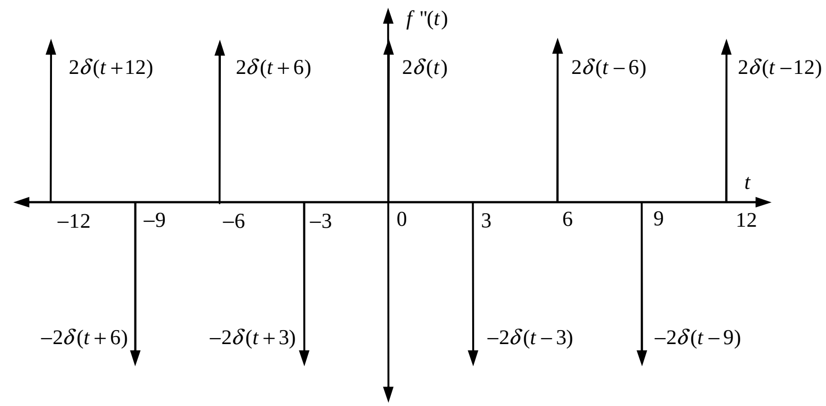
$$f(t)=|\,t\,|=\begin{cases} t & ,\text{si} \quad 0\le t<3 \\ -t & ,\text{si} \quad -3<t<0 \end{cases}$$



$$f'(t)=\begin{cases} 1 & ,\text{si} \quad 0<t<3 \\ -1 & ,\text{si} \quad -3<t<0 \end{cases}$$



$f''(t)=0$



$$f''(t)=\delta_6(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\delta(t-3(2n))+\sum_{n=-\infty}^{\infty}-2\delta(t-3(2n-1))$$

$$=2\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-6n))-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta([t+3]-6n)\right)$$

$$=2\left[\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{3}[t+3]\right)\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t+n\pi\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right)$$, pues $\cos(u+n\pi)=(-1)^n\cos(u)$

$$=\frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{f''(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}\left[1-(-1)^n\right]\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)}\cdots(*)$$

Como la función $f(t)=|\,t\,|$ es par, entonces:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right),\qquad -3<t<3$$

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{n\pi\,a_n}{3}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}t\right),\qquad -3<t<3$$

$$\boxed{f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{n^2\pi^2a_n}{9}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)}\cdots(**)$$

Por $(*)$ y $(**)$ tenemos: $\frac{2}{3}\left[1-(-1)^n\right]=-\frac{n^2\pi^2a_n}{9}$

Despejando, $a_n=-\frac{6\left[1-(-1)^n\right]}{\pi^2n^2}\quad\Rightarrow\quad a_{2n}=0$ y $a_{2n-1}=\frac{12}{\pi^2(2n-1)^2}\quad\forall\,n=1,2,3,\cdots$

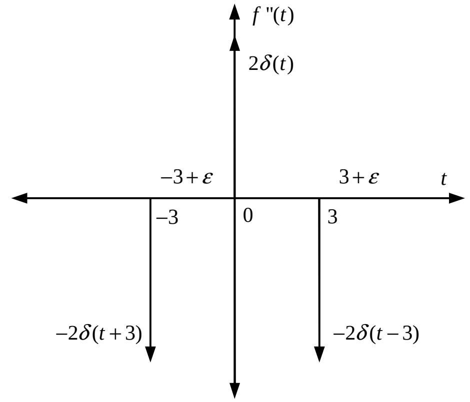
Por otro lado:

$$a_0=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3}|\,t\,|\,dt=\frac{4}{6}\int_0^3 t\,dt=\left.\frac{t^2}{3}\right|_0^3=\frac{3^2}{3}\quad\Rightarrow\quad a_0=3$$

Luego, la serie de Fourier

$$f(t)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}t\right)$$

Ahora hallamos la serie de Fourier de $f(t)=|\,t\,|$, con $-3<t<3$, mediante diferenciación o impulsos unitarios.



$f''(t)=2\delta(t)-2\delta(t-3)$

$-3+\varepsilon<t<3+\varepsilon$ o $-3<t<3$

Pero: $f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{n^2\pi^2a_n}{9}\right]\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)$

En consecuencia: $-\frac{n^2\pi^2a_n}{9}=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3}\left[2\delta(t)-2\delta(t-3)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$

$$\Rightarrow\quad -\frac{n^2\pi^2a_n}{9}=\frac{2}{3}\int_{-3}^{3}\delta(t)\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt-\int_{-3}^{3}\delta(t-3)\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{n^2\pi^2a_n}{9}=\frac{2}{3}\left[\left.\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right|_{t=0}-\left.\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right|_{t=3}\right]$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{n^2\pi^2a_n}{9}=\frac{2}{3}\left[\cos(0)-\cos(n\pi)\right]$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{n^2\pi^2a_n}{9}=\frac{2}{3}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow\quad a_{2n}=0\ \text{ y }\ a_{2n-1}=\frac{12}{\pi^2(2n-1)^2}\quad\forall\,n=1,2,3,\cdots$$