UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco
mariochuqui@hotmail.com
www.mariochuqui.jimdo.com

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 1 - e^{-t} \qquad \cdots(1)$$

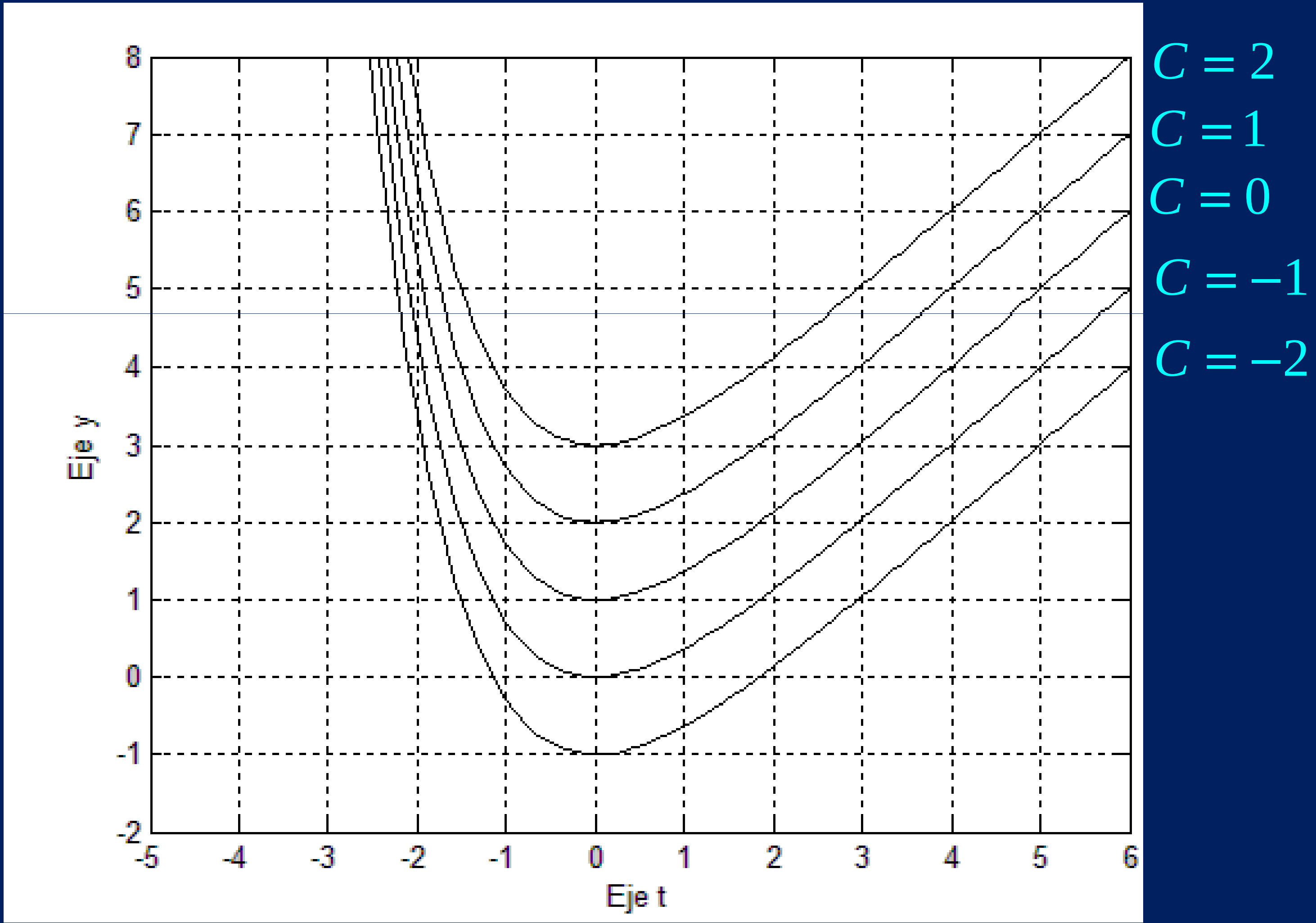
Resolviendo usando el cálculo de las primitivas (integrando) hallamos:

$$y(t) = t + e^{-t} + C$$

C Es una constante

Graficando $y(t) = t + e^{-t} + C$

Tomando a C una constante



Ley del enfriamiento de Newton

La velocidad de cambio de la temperatura del cuerpo está relacionada con la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea, además establece que dicha velocidad de cambio es directamente proporcional a la diferencia de estas temperaturas.

Es decir:

Si consideramos $T(t)$ la temperatura del cuerpo en el instante t

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\alpha) \qquad T(0) = T_0$$

Donde: T_α la temperatura del medio que lo rodea

k es una constante positiva que depende del material

Resolviendo el problema

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\alpha) \quad \Rightarrow \quad \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_\alpha} = -k\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln(T - T_\alpha) - \ln(T_0 - T\alpha) = -kt$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{T - T_\alpha}{T_0 - T\alpha}\right) = -kt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T - T_\alpha}{T_0 - T\alpha} = e^{-kt}$$

Despejando T, obtenemos:

$$\boxed{T = T_\alpha + (T_0 - T_\alpha)e^{-kt}}$$

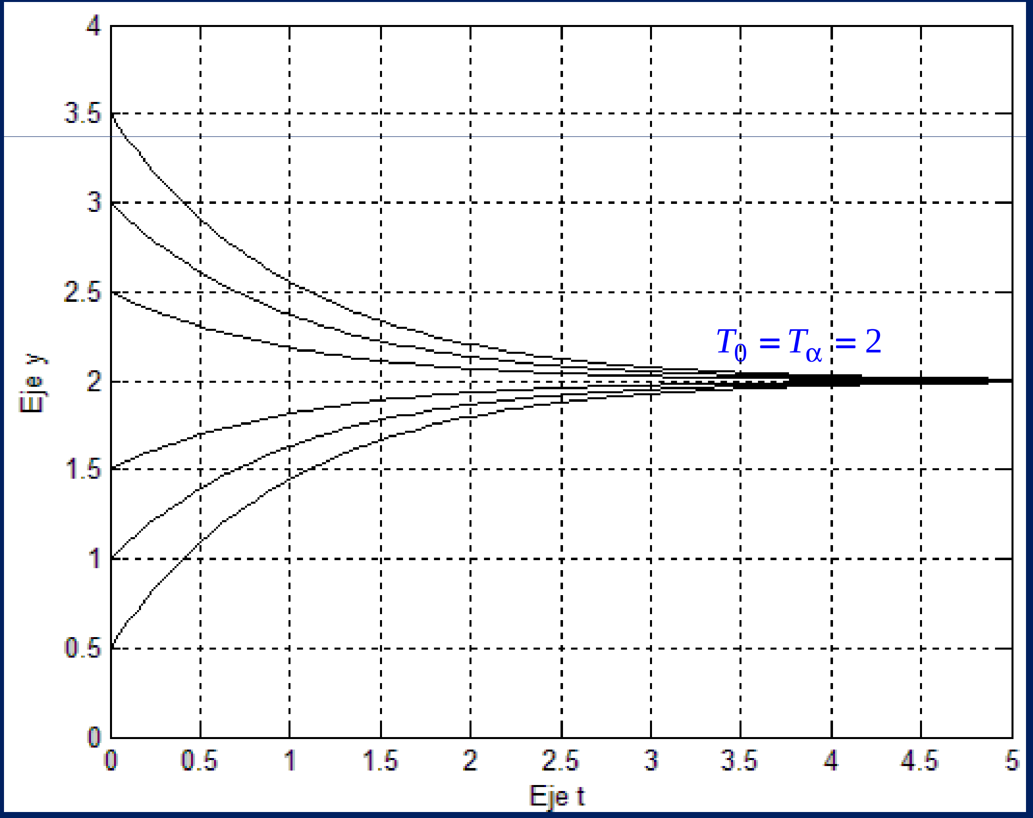
Graficando

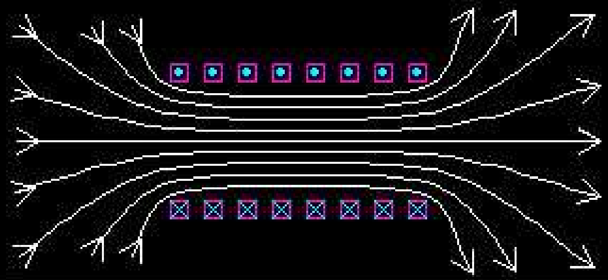
$$T = T_\alpha + (T_0 - T_\alpha)e^{-kt}$$

Tomando: $T_\alpha = 2$ la temperatura del medio que lo rodea

$k = 1$ Constante

Tomando $T_0 = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2.5,\ 3.0,\ 3.5$ (Valores iniciales)



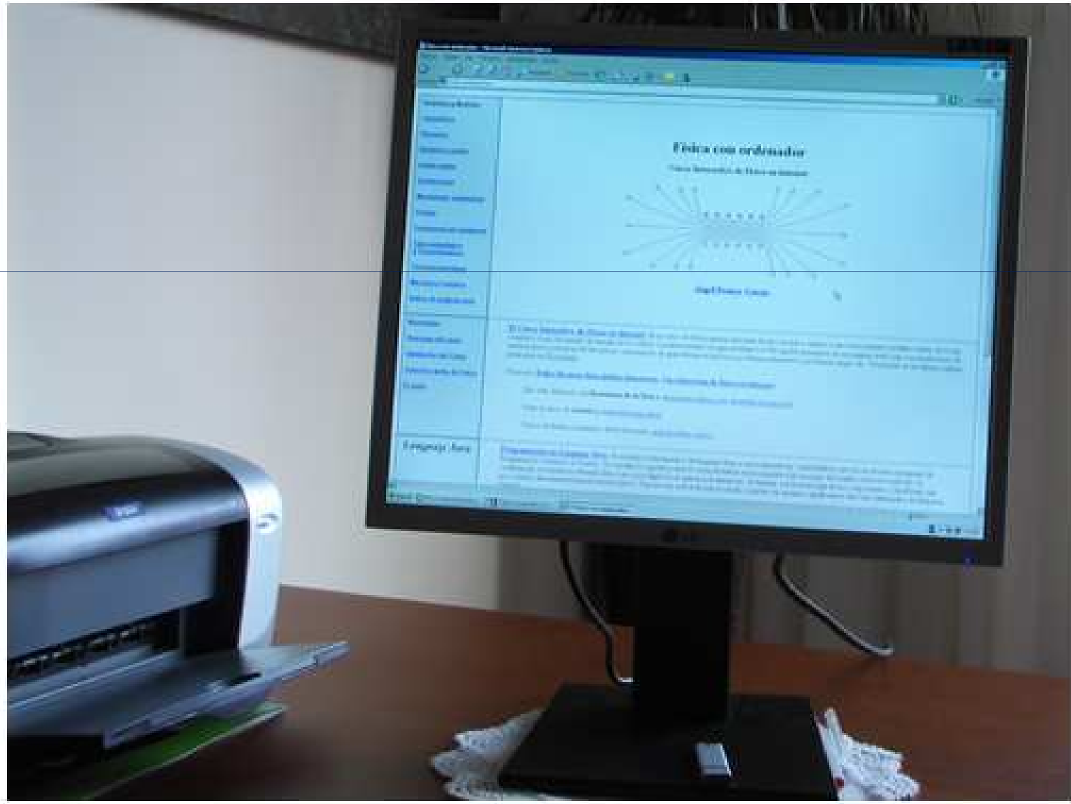


Curso Interactivo de Física en Internet

© Ángel Franco García 1998-2009

El Curso Interactivo | Métodos numéricos | Lenguaje Java | Descarga

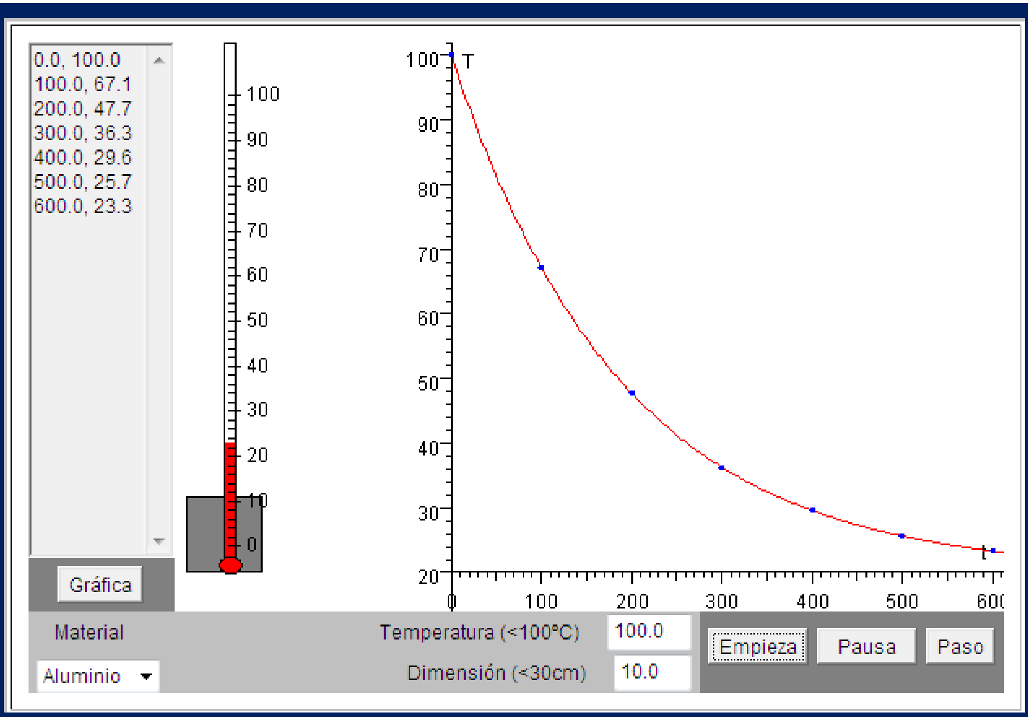
- Unidades y medidas
- Cinemática
- Dinámica
- Dinámica celeste
- Sólido rígido
- Oscilaciones
- Movimiento ondulatorio
- Fluidos
- Fenómenos de transporte
- Física estadística y Termodinámica
- Electromagnetismo
- Mecánica cuántica



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/index.html

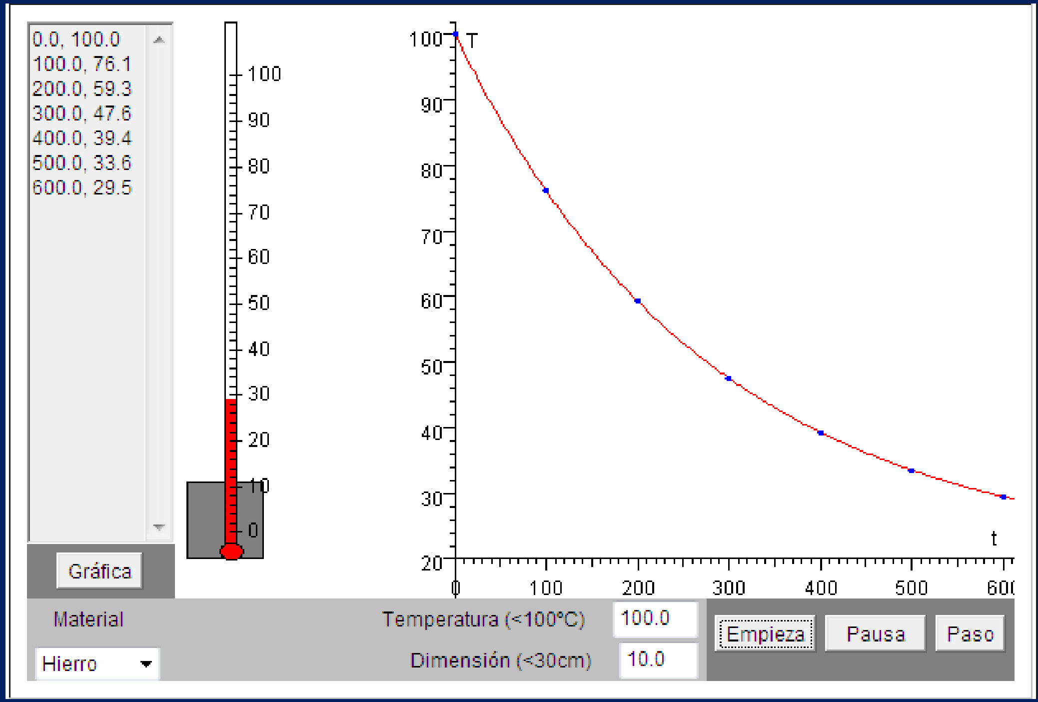
1. Sustancia de referencia Aluminio

* Temperatura inicial T_0=100ºC
* Tamaño de la muestra d=10 cm
* Valor de la pendiente k_{Al}=0.00530
* Densidad ρ_{Al}=2700 kg/m^3
* Calor específico c_{Al}=880 Jl/(K·kg)



2. Sustancia Hierro

* Temperatura inicial T_0=100ºC
* Tamaño de la muestra d=10 cm
* Valor de la pendiente k_x=0.00355
* Densidad ρ_x=7880 kg/m^3.
* El calor específico del Hierro es c_x=450.2 J/(K·mol)



PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Definición:

Una solución del problema de valor inicial

(I) $$y' = f(t, y) \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0$$

en un intervalo $[t_0, t_1]$ es una función $y = y(t)$ derivable tal que:

(II) $$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{Para todo} \quad t \in [t_0, t_1]$$

Nota: la gráfica de la solución $y = y(t)$ pasa por el punto inicial (t_0, y_0)

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En cada punto (t, y) del rectángulo $R = \{ (t, y) : \; a \le t \le b, \; c \le y \le d \}$ la pendiente m de la solución $y = y(t)$, puede hallarse mediante la formula implícita $m = f(t, y(t))$.

Por lo tanto, cada valor $m_{i\,j} = f(t_i \,, y_j)$, calculado para distintos puntos del rectángulo, representa la pendiente de la recta tangente a la solución que pasa por $(t_i \,, y_j)$.

UN CAMPO DE DIRECCIONES, O CAMPO DE PENDIENTES

Es una gráfica en la que se representa las pendientes $\{m_{i\,j}\}$ en una colección de puntos del rectángulo y puede usarse para observar cómo se va ajustando una solución a la pendiente dada.

Ejemplo:

Resolver

El problema de valor inicial, $$y' = \frac{t-y}{2}$$

para los valores iniciales: $y(0) = 1$ y $y(0) = 4$

L uego, grafique en **MATLAB** el campo de direcciones de la ecuación en el rectángulo :

$$R = \{\ (t, y) : \quad 0 \leq t \leq 8,\ \ 0 \leq y \leq 7\ \}$$

, además grafique soluciones calculadas.

Haciendo el cambio de variable

$$y' = \frac{t-y}{2} \quad \Rightarrow \quad z = t - y \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = 1 - z'}$$

Reemplazando: $$1 - z' = \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad z' = 1 - \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = 1 - \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{1 - \frac{z}{2}} = dt$$

Integrando: $$t = -2\ln\left(1 - \frac{z}{2}\right) + C'$$ Llamando $C' = \ln\left(\frac{1}{C}\right)$

Ejemplo:

Reemplazando: $t = -2\ln\left(1-\frac{z}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{C}\right)$ Por propiedad de ln: $t = -2\ln\left(\frac{1}{C}\left[1-\frac{z}{2}\right]\right)$

$\Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{C}\left(1-\frac{t-y}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t-y = -2Ce^{-\frac{t}{2}}+2 \quad \Rightarrow \quad y = 2Ce^{-\frac{t}{2}}-2+t$

Lo que resulta: $\boxed{y(t) = 2Ce^{-\frac{t}{2}}-2+t} \cdots (\beta)$

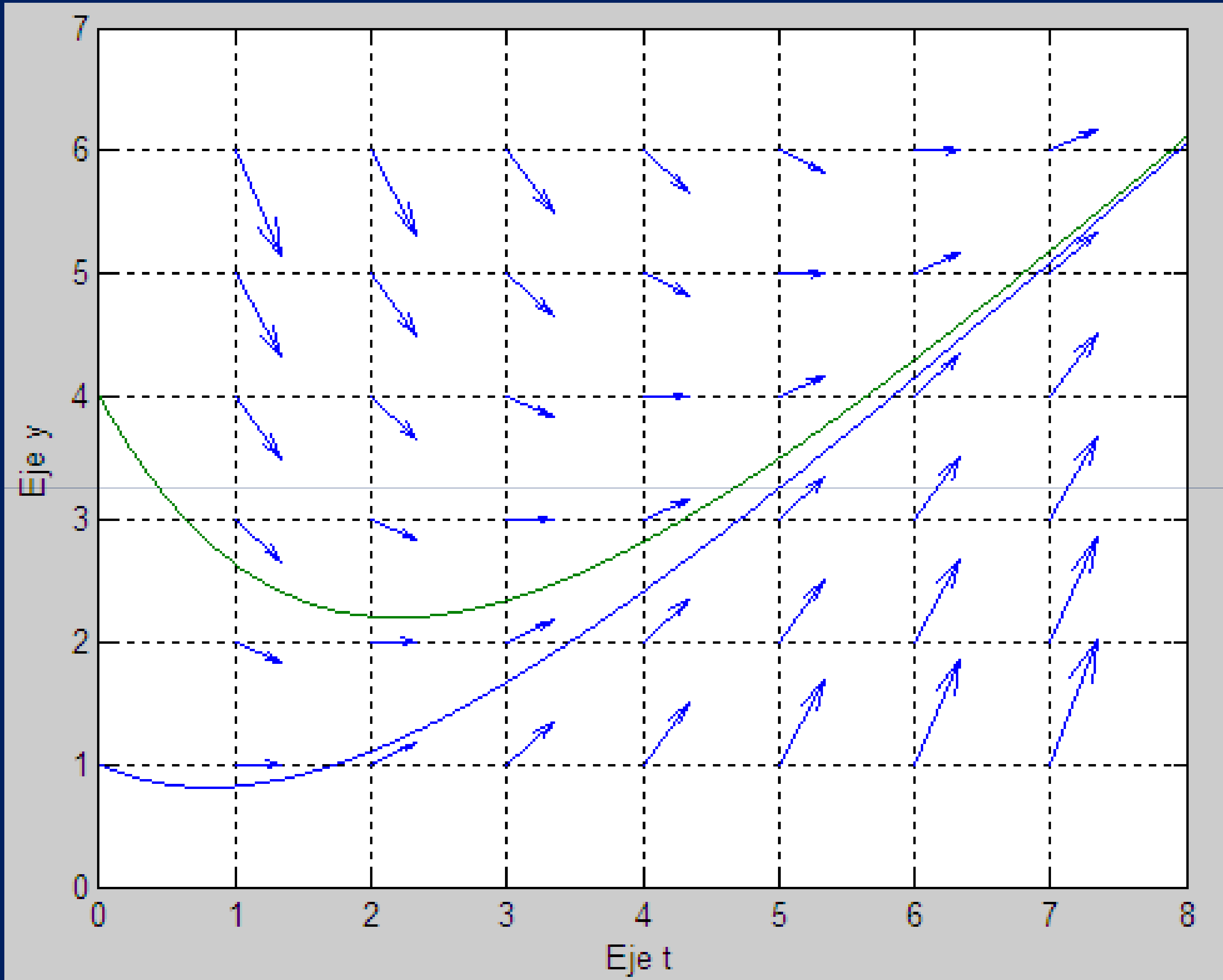
Calculando para los valores iniciales dados:

Si: $\boxed{y(0)=1} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2C-2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 3e^{-\frac{t}{2}}-2+t$

Si: $\boxed{y(0)=4} \quad \Rightarrow \quad 4 = 2C-2 \quad \Rightarrow \quad C = 3 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 6e^{-\frac{t}{2}}-2+t$

Escribir en **MATLAB**, el programa **campdir.m**

```
[t,y]=meshgrid(1:7,6:-1:1);
dt=ones(6,7);
dy=(t-y)/2;
quiver(t,y,dt,dy);
grid on
xlabel('Eje t');
ylabel('Eje y');
hold on
x=0: .01:8;
z1=3*exp(-x/2)-2+x;
z2=6*exp(-x/2)-2+x;
plot(x,z1,x,z2)
hold off
```



Eje y
Eje t

Definición 1

Dado el rectángulo, $R = \{ \ (t, y): \quad a \leq t \leq b, \quad c \leq y \leq d \ \}$

Supongamos que $f(t, y)$ es continua en R

Se dice que la función f verifica la condición de Lipschitz con respecto a la variable y en R

, si existe una constante $L > 0$, tal que:

$$\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq L \left| y_1 - y_2 \right|$$

para cualquier $(t, y_1), (t, y_2) \in R$

La constante L se llama constante de Lipschitz de f .

TEOREMA 1

Supongamos que $f(t,y)$ está definida en un rectángulo R

Si existe una constante $L > 0$, tal que:

$$\left| f_y(t,y) \right| \leq L \quad , \quad \text{para todo} \quad (t,y) \in R$$

Entonces

Verifica una condición de Lipschitz con respecto a su variable en y , siendo su constante de Lipschitz L

Demostración:

Fijando t y usando el teorema de valor medio, obtenemos c_1, con $y_1 < c_1 < y_2$, tal que:

$$\left| f(t,y_1) - f(t,y_2) \right| = \left| f_y(t,c_1)\,(y_1 - y_2) \right| = \left| f_y(t,c_1) \right| \left| y_1 - y_2 \right| \leq L \left| y_1 - y_2 \right|$$

TEOREMA 2. (Existencia y unicidad de soluciones)

Supongamos que $f(t,y)$ está definida en un rectángulo

$$R = \left\{ (t,y) : \quad t_0 \leq t \leq t_1, \ \ c \leq y \leq d \ \right\}$$

Si f verifica una condición de Lipschitz con respecto a su variable y

en R y (t_0, y_0)

Entonces

El problema de valor inicial $y' = f(t,y)$ con $y(t_0) = y_0$

,

tiene solución única $y = y(t)$ en algún intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Métodos numéricos para el problemas de valor Inicial

- Método de Euler
- Método de Heun
- Método de Euler Modificado
- Método de Runge-Kutta

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Ecuación Diferencial

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad\qquad t \in [a, b]$$

Condición inicial

$$y(a) = y_0$$

METODO DE EULER

Métodos numéricos para el problemas de valor Inicial

- Método de Euler
- Método de Heun
- Método de Euler Modificado
- Método de Runge-Kutta

Métodos numéricos para el P.V.I.

- Problema de Valor Inicial

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(a) = y_0$$

- Discretización

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

$$y_0 = y(t_0), \; y_1 \cong y(t_1), \; \cdots y_n \cong y(t_n)$$

- Forma integral del problema de valor inicial

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

Métodos numéricos para el P.V.I.

- Error local del método iterativo

$$e_k = |y_k - y(t_k)|$$

- Error máximo

$$E(h) = \max_k e_k$$

- Convergencia

$$\lim_{h \to 0} E(h) = 0$$

- Método de orden p:

$$E(h) \cong M h^p \quad , \quad M = \text{const.}$$

Método de Euler

- Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt$$

- Aproximación (Fórmula de los rectángulos)

$$y_1 = y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, y_0)$$

- Paso fijo $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

- Método de Euler: para k=1,2...,n

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

Método de Euler

- function [t,y]=mieuler(a,b,y0,n)
- h=(b-a)/n; t=a:h:b;
- y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
- for k=1:n

  y(k+1)=y(k)+h*f(t(k),y(k));
- end

Método de Heun

- Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\,dt$$

- Aproximación (Fórmula de los trapecios)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y)\,dt \cong h/2(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1))$$

- Aproximación por Euler (predicción)

$$y_1^p = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

- Método de Heun (correccción)

$$y_1 = y_0 + h/2(f(t_0, y_0) + f(t_1, y_1^p))$$

Método de Heun

```
function [t,y]=heun(a,b,y0,n)
h=(b-a)/n; t=a:h:b;
y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
for k=1:n
    k1=f(t(k),y(k));
    ykp=y(k)+h*k1;
    k2=f(t(k+1),ykp);
    y(k+1)=y(k)+h/2*(k1+k2);
end
```

Método de Euler modificado

- Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\,dt$$

- Aproximación (Fórmula del punto medio)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y)\,dt \cong h f(t_0 + h/2, y(t_0 + h/2))$$

- Aproximación por Euler

$$y(t_0 + h/2) \cong y_{1/2} = y_0 + h/2\, f(t_0, y_0)$$

- Método de Euler modificado

$$y_1 = y_0 + h f(t_0 + h/2, y_{1/2})$$

Método de Euler modificado

```
function [t,y]=eulermod(a,b,y0,n)
h=(b-a)/n; t=a:h:b;
y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
for k=1:n
   yk2=y(k)+h/2*f(t(k),y(k));
   y(k+1)=y(k)+h*f(t(k)+h/2,yk2));
end
```

Método de Runge-Kutta

- Forma integral de la ecuación diferencial

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt$$

- Aproximación de la integral (Regla de Simpson)

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y)dt \cong \frac{h}{6}(f(t_0, y_0) + 4f(t_{1/2}, y_{1/2}) + f(t_1, y_1))$$

Método de Runge-Kutta (cont.)

- Estimaciones previas

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$

$$k_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_1)$$

$$k_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_2)$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3)$$

- Aplicación de la fórmula

$$y_1 = y_0 + h/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Método de Runge-Kutta

```
function [t,y]=rungekut(a,b,y0,n)
h=(b-a)/n; t=a:h:b;
y=zeros(size(t)); y(1)=y0;
for k=1:n
   k1=f(t(k),y(k)); tk2=t(k)+h/2;
   k2=f(tk2,y(k)+h/2*k1);
   k3=f(tk2,y(k)+h/2*k2);
   k4=f(t(k+1),y(k)+h*k3);
 y(k+1)=y(k)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
```

Comparación de métodos

Método	Orden del error	Evaluaciones funcionales
Euler	h	1
Heun	h^2	2
Euler modificado	h^2	2
Runge-Kutta	h^4	4

GRACIAS POR SU ATENCIÓN