

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA



UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

www.mariochuqui.jimdo.com

Diferenciación numérica

Diferenciación

La diferenciación numérica puede calcularse usando la definición de derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tomando una h pequeña. Si $h > 0$ se llama fórmula de diferencia progresiva, si $h < 0$ se llama fórmula de diferencia regresiva.

Error

$$x_0 = 2$$

$$\ln(x_0) = 0.693147181$$

$$f'(x_0) = 0.5$$

h	$f(x_0 + h)$	$(f(x_0 + h) - f(x_0)) / h$	$ inc - f'(x_0) $
0.1	0.741937345	0.487901642	-0.012098358
0.01	0.698134722	0.498754151	-0.001245849
0.001	0.693647056	0.499875042	-0.000124958
0.0001	0.693197179	0.49999875	-1.24996E - 05

Preguntas rápidas

Obtenga la derivada de las siguientes funciones en el punto especificado utilizando Excel o Matlab. Compárelas con el valor obtenido analíticamente.

1. $f(x) = 3x \operatorname{sen}(2x)$, $x = \pi/6$

2. $f(x) = 5\ln(x + 1) - x^2/5$, $x = 1.2$

Fórmulas de diferencias divididas hacia adelante

Primera derivada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

Fórmulas de diferencias divididas centradas

Primera derivada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{h} \quad f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} \quad f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))}{12h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i-1}) + 2f(x_{i+1}) - f(x_{i+2}))}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3}))}{8h^3}$$

Fórmulas de diferencias divididas hacia atrás

Primera derivada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3}))}{h^3}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4}))}{2h^3}$$

Ejemplo

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.16x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

x_{i-2}	0.00	1.20000000
x_{i-1}	0.25	1.10351563
x_i	0.50	0.92500000
x_{i+1}	0.75	0.63632813
x_{i+2}	1.00	0.20000000

Valor real	$f'(x_i) =$	-0.91250000	
Diferencias divididas			error
Hacia adelante		-0.859375	5.82%
Hacia atrás		-0.878125	3.77%
Hacia centrada		-0.912500	0.00%

Datos no espaciados regularmente

Para derivar datos no espaciados regularmente se utiliza la siguiente fórmula. Se requiere conocer la función en tres puntos.

$$f'(x) = f(x_{i-1}) \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + f(x_i) \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + f(x_{i+1}) \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

Ejemplo

El flujo de calor en la interfaz suelo-aire puede calcularse con la ley de Faraday

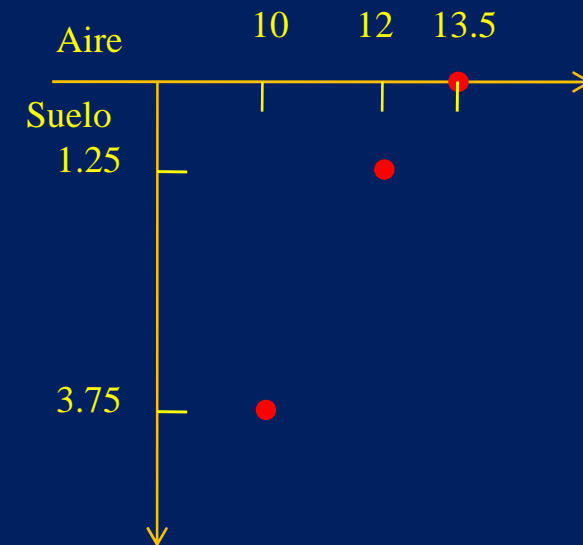
$$q(z=0) = -k\rho C \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0}$$

Donde q = flujo de calor, k = coeficiente de difusividad térmica (3.5×10^{-7}), ρ = la densidad del suelo (1800), C = calor específico del suelo (840).

$$f'(0) = 13.5 \frac{2(0) - 1.25 - 3.75}{(0 - 1.25)(0 - 3.75)} +$$
$$12 \frac{2(0) - 0 - 3.75}{(1.25 - 0)(1.25 - 3.75)} + 10 \frac{2(0) - 0 - 1.25}{(3.75 - 0)(3.75 - 1.25)}$$

$$= -1.333$$

$$q = 70.56$$



GRACIAS POR SU ATENCIÓN