UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

www.mariochuqui.webs.con

Interpolación y aproximación polinomial

Definición

Un polinomio de grado n es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n <> 0$

Teorema (teorema de aproximación de Weierstrass)

Suponga que f está definida y es continua en $[a, b]$. Para $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P definido en $[a, b]$, con la propiedad de que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \text{ para toda } x \text{ en } [a, b]$$

Desarrollo en series de Taylor

Sea $f(x) = e^x$

Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $x = 0$

$P_0(x) = 1$ $\quad$ $P_1(x) = 1 + x$ $\quad$ $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$

$P_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ $\quad$ $P_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$

$P_5(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + x^5/120$

Valores de e^x

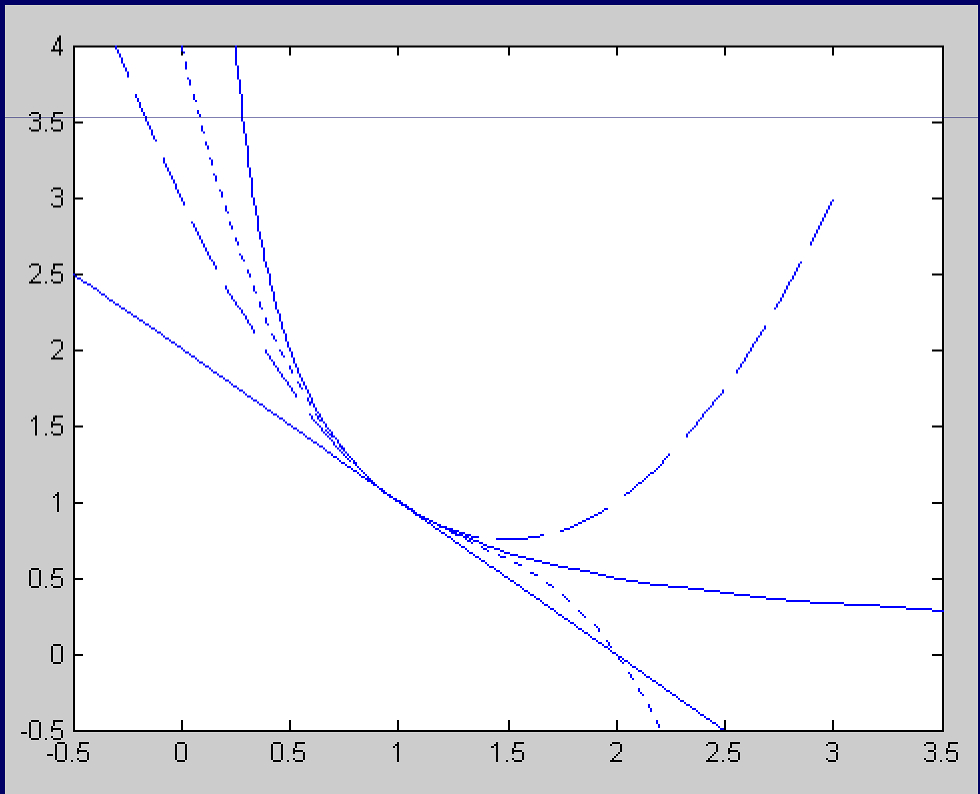
Valores de las aproximaciones de e^x con polinomios de Taylor

x	p0(x)	p1(x)	p2(x)	p3(x)	p4(x)	p5(x)	exp(x)
-2.0	1.00000	-1.00000	1.00000	-0.33333	0.33333	0.06667	0.13534
-1.5	1.00000	-0.50000	0.62500	0.06250	0.27344	0.21016	0.22313
-1.0	1.00000	0.00000	0.50000	0.33333	0.37500	0.36667	0.36788
-0.5	1.00000	0.50000	0.62500	0.60417	0.60677	0.60651	0.60653
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.5	1.00000	1.50000	1.62500	1.64583	1.64844	1.64870	1.64872
1.0	1.00000	2.00000	2.50000	2.66667	2.70833	2.71667	2.71828
1.5	1.00000	2.50000	3.62500	4.18750	4.39844	4.46172	4.48169
2.0	1.00000	3.00000	5.00000	6.33333	7.00000	7.26667	7.38906

Expansión de Taylor para 1/x

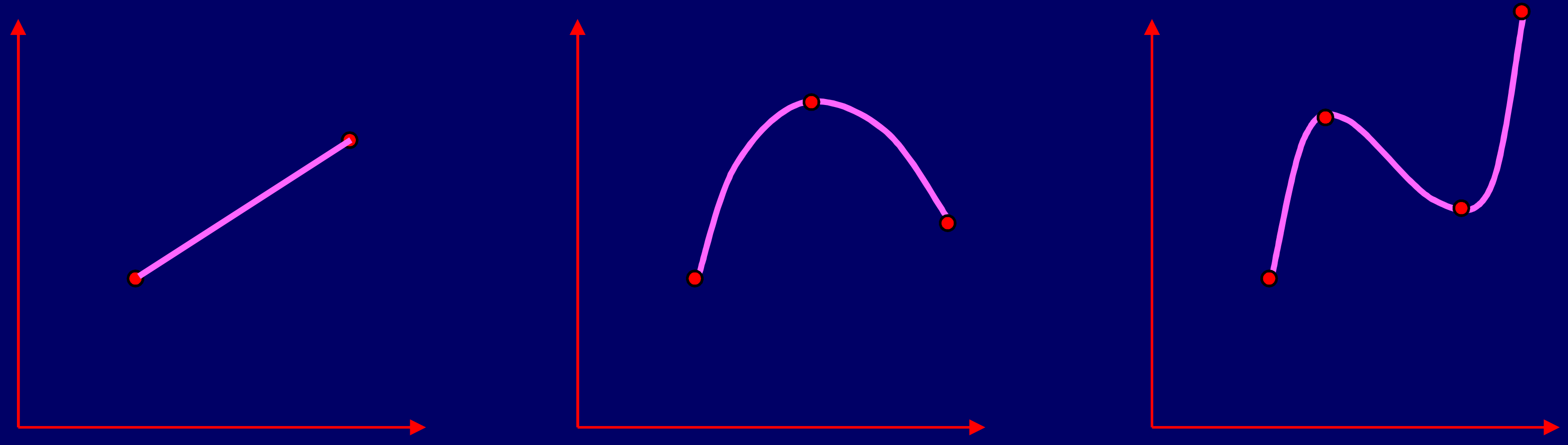
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Pn(3)	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85



Interpolación polinomial de Newton

Revisaremos solo algunos casos: lineal, de segundo grado y de tercer grado.



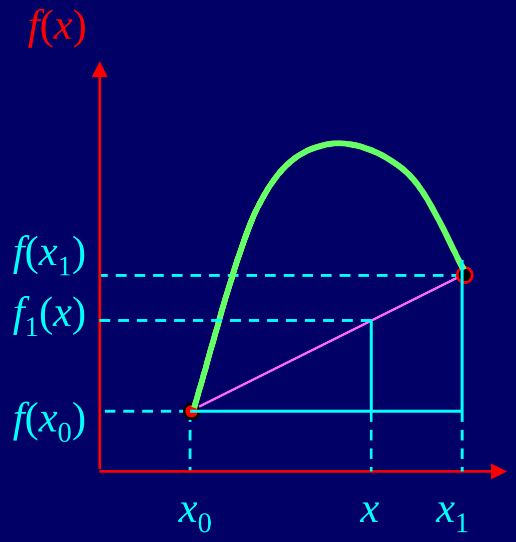
Interpolación lineal

Utilizando triángulos semejantes

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Reordenando

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



Ejemplo

Estimar ln 2 mediante interpolación lineal si ln1 = 0 y ln 6 = 1.791759 y ln 4 = 1.386294

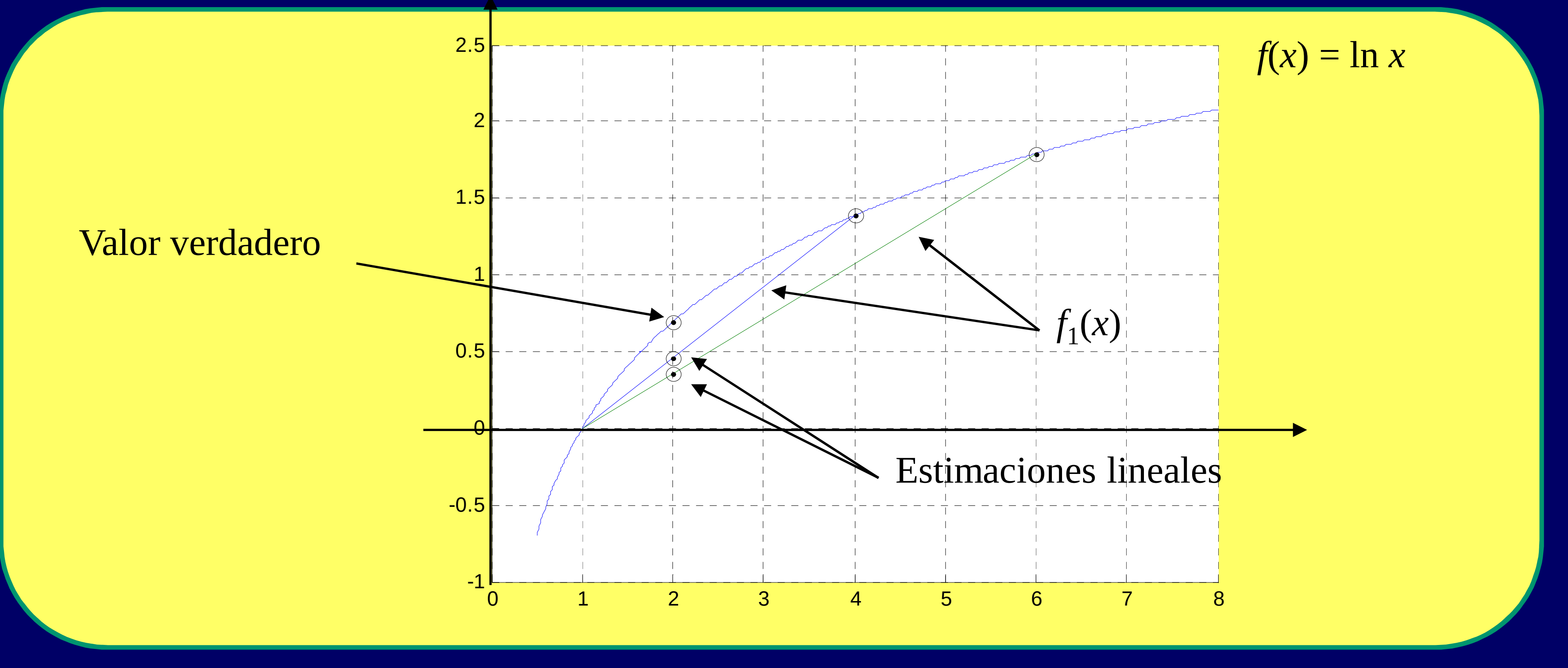
$$f_1(2) = \ln 1 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.3583519$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(2) = \ln 1 + \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.4620981$$

Valor real ln 2 = 0.6931472

Error relativo porcentual = 33.3%



Interpolación cuadrática

Polinomio cuadrático

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (1)$$

simplificado

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0 x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1$$

Podemos escribirlo como

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Donde

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0 x_1,\ a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1,\ a_2=b_2$$

Podemos evaluar b_0, b_1 y b_2 sustituyendo x_0, x_1 y x_2 en la ecuación (1), se obtiene

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Ejemplo 2

Calculemos ln 2 con ln 4 y ln 6, los punto que se conocen son:

$x_0 = 1$ $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ $f(x_0) = 1.386294$

$x_0 = 6$ $f(x_0) = 1.791759$

Aplicando las ecs. anteriores

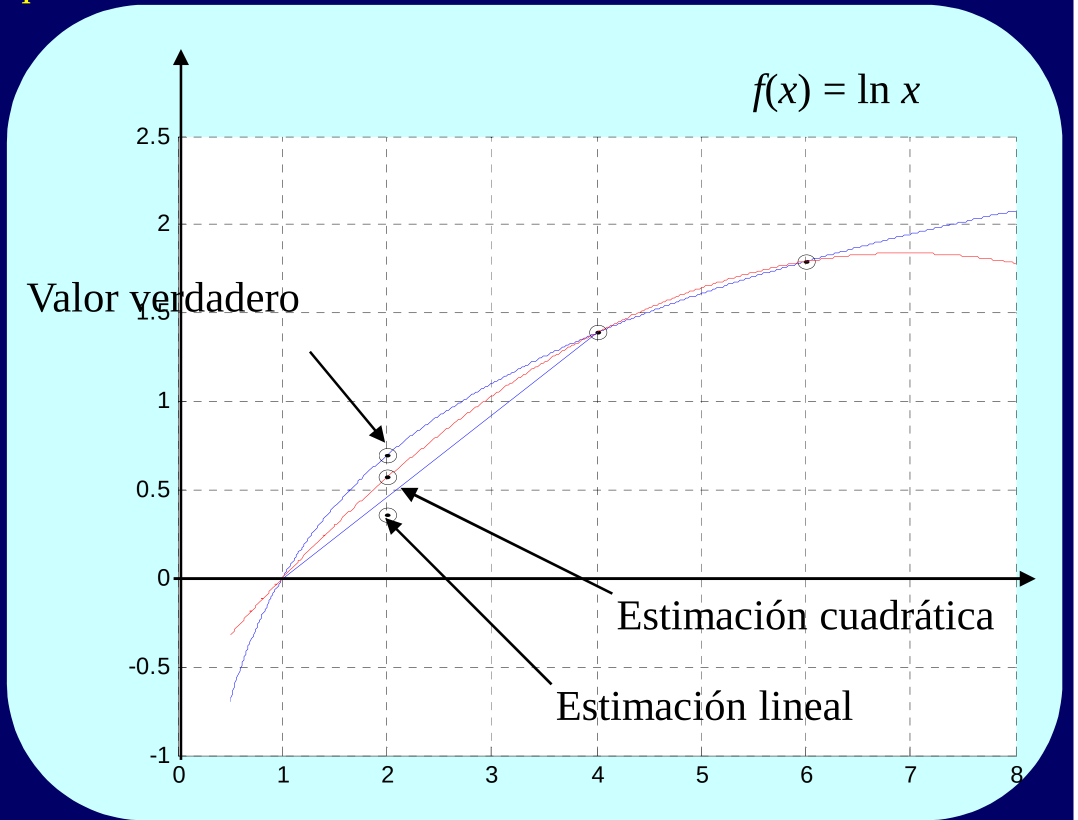
$b_0 = 0$

$b_1 = (1.386294 – 0)/(4 – 1) = 0.4620981$

$b_2 = ((1.791759 – 1.386294)$

$/(6 – 4) – 0.4620981)/(6 – 1)$

$= – 0.0518731$



El polinomio es

$f_2(x) = 0.4620981(x – 1) – 0.0518731(x – 1)(x – 4)$

$f_2(2) = 0.5658444$

Valor real ln 2 = 0.6931472

Error relativo porcentual = 18.4%

Forma general

Polinomio general

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Los coeficientes se calculan con

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_1, x_0]$

$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$

$b_n = f[,x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$

Donde los paréntesis cuadrados se denominan *diferencias divididas finitas*.

La n-ésima diferencia dividida finita es:

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

Se conoce como *polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas*.

Ejemplo 3

Calculemos ln 2 con ln 0, ln 4, ln 5 y ln 6, los punto que se conocen son:

$x_0 = 1$ $f(x_0) = 0$

$x_1 = 4$ $f(x_1) = 1.386294$

$x_2 = 6$ $f(x_3) = 1.791759$

$x_3 = 5$ $f(x_2) = 1.609438$

primeras diferencias

$f\,[x_1, x_0] = (1.386294 – 0)/(4 – 1) = 0.4602981$

$f\,[x_2, x_1] = (1.791759 – 1.386294)/(6 – 4) = 0.2027326$

$f\,[x_3, x_2] = (1.609438 – 1.791759)/(5 – 6) = 0.1823216$

Segundas diferencias

$f\,[x_2, x_1, x_0] = (0.2027326 – 0.4602981)/(6 – 1) = –0.05187311$

$f\,[x_3, x_2, x_1] = (0.1823216 – 0.2027326)/(5 – 4) = –0.02041100$

tercera diferencia

$f\,[x_3, x_2, x_1 , x_0] = (–0.02041100–(–0.05187311))/(5 – 1) = 0.007865529$

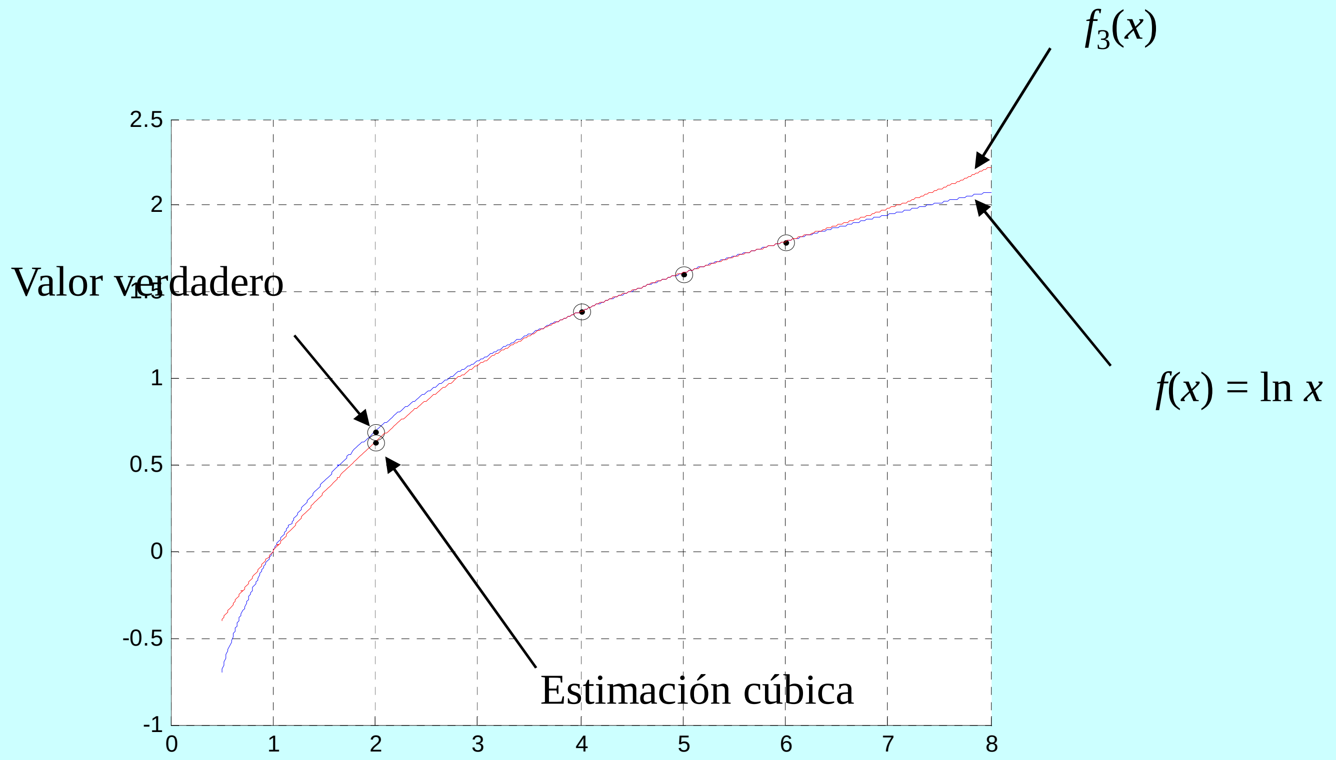
Polinomio

$f_3(x) = 0 + 0.4602981(x – 1) –0.05187311(x – 1) (x – 4) + 0.007865529(x – 1) (x – 4) (x – 6)$

Valor calculado con el polinomio

$f_3(2) = 0.6287686$

Ejemplo 3 (cont.)



Estimación del error

Para estimar el error requerimos de un datos más (x_{n+1}). La siguiente fórmula puede utilizarse para estimar el error.

$$Rn = f\,[,x_{n+1}, x_n, ..., x_1, x_0](x - x_0)\,(x - x_1)...\,(x - x_n)$$

Interpolación y polinomio de Lagrange

Se trata de encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ... $(x_n, f(x_n))$, se construye un cociente $L_{n,k}(x_k)$ con la propiedad de que

$L_{n,k}(x_i) = 0$ cuando $i \neq k$ y $L_{n,k}(x_k) = 1$

Se requiere entonces que el numerador contenga

$(x - x_0)\ (x - x_1)\ldots\ (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ (x - x_n)$

El denominador debe coincidir con el numerador cuando $x = x_k$.

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

N-ésimo polinomio interpolante de Lagrange

Teorema

Si x_0, x_1, x_2, ... x_n, son n+1 números distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un polinomio de grado a lo más n, con la propiedad de que

$$f(x_k) = P(x_k) \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \ldots n$$

Este polinomio está dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

donde

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Aproximación a 1/x con interpolantes de Lagrange

Usaremos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 4$, para obtener un polinomio de grado 2 para 1/x. $f(x_0) = 0.5$, $f(x_1) = 0.4$ y $f(x_2) = 0.25$.

Los polinomios de Lagrange son:

$$L_{n,0}(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-0.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_{n,1}(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_{n,2}(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x+4.5)x+5}{3}$$

$P(x) = 0.5*((x–6.5)x+10)+0.4*((–4x+24)x–32)/3+ 0.25*((x + 4.5)x+5)/3$

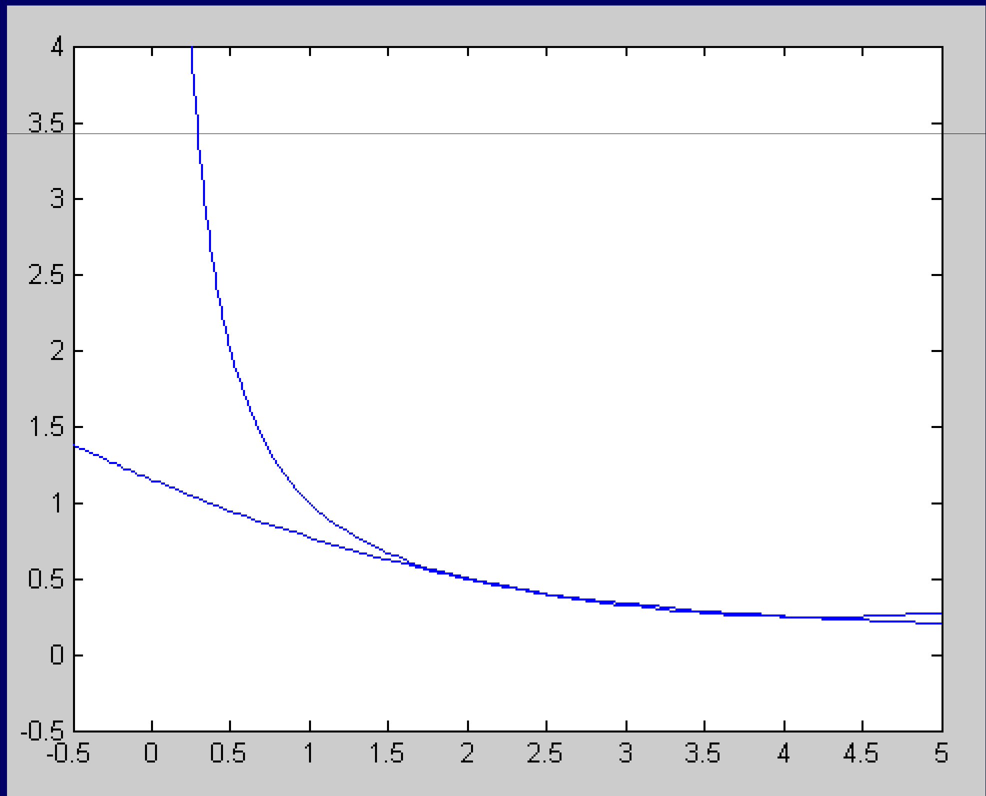
$P(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15 = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$

$f(3) = P(3) = 0.325$

Aproximación a 1/x con interpolantes de Lagrange

$P(x) = (0.05x - 0.425)x + 1.15$

$f(3) = P(3) = 0.325$



El error en la interpolación de Lagrange

El error en la interpolación de Lagrange puede calcularse con

$$\left| f(x_0) - P(x) \right| \leq \frac{f^{n+1}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Algoritmo en Matlab

```
function fi = Lagran_(x, f, xi)
fi=zeros(size(xi));
np1=length(f);
for i=1:np1
    z=ones(size(xi));
    for j=1:np1
        if i~=j, z = z.*(xi - x(j))/(x(i)-x(j));end
    end
    fi=fi+z*f(i);
end
return
```

Calcula coeficientes de $P_2(x)$

```
%Calcula el polinomio interpolante de Lagrange
de grado 2

function [a,b,c] =
Lagrange(x0,x1,x2,fx0,fx1,fx2)

t0 = (x0 - x1)*(x0 - x2);

t1 = (x1 - x0)*(x1 - x2);

t2 = (x2 - x0)*(x2 - x1);

a = fx0/t0 +fx1/t1 +fx2/t2;

b = -fx0*(x1 + x2)/t0 - fx1*(x0 + x2)/t1 -
fx2*(x0 + x1)/t2;

c = fx0*x1*x2/t0 + fx1*x0*x2/t1 + fx2*x0*x1/t2;
```

Comandos de Matlab

poly(r) – toma un vector con las raíces de un polinomio y genera el polinomio

```
poly([1 2 3]) = 1 -6 11 -6
roots(1 -6 11 -6) = 3 2 1
```

polifit(x,y,n) – genera un polinomio interpolante para los datos x, y de grado n, x y y deben tener n+1 datos

```
polyfit([1.1 2.3 3.9 5.1],[3.887 4.276 4.651 2.117],3) =
ans =
 -0.20145   1.43852  -2.74771   5.43700
```

El polinomio es

$$-0.20145x^3 + 1.43852x^2 - 2.74771x + 5.43700$$


gracias

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

http://www.mariochuqui.webs.com

UNSAAC