UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

www.mariochuqui.jimdo.com

Integración numérica

Integración numérica

A los métodos de integración se les llama **cuadratura numérica**.

Seleccionaremos un conjunto de nodos [x_0, ..., x_n] del intervalo [a, b].

Después integramos un polinomio interpolante de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Donde

$$a_i = \int_a^b L_i(x)$$

Regla del trapecio

Utilizando un polinomio interpolante lineal de Lagrange.

$$P(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

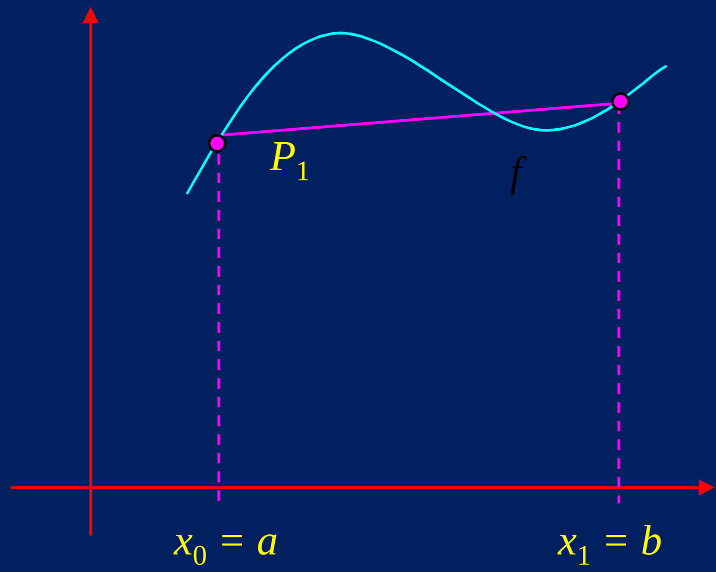
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx$$

$$=\frac{(x_1-x_0)}{2}\big(f(x_0)+f(x_1)\big)=\frac{h}{2}\big(f(x_0)+f(x_1)\big)$$

Donde $h = x_1 - x_0$

Esta fórmula vale cuando $f(x)$ tiene valores positivos.

Da valores exactos para polinomios de grado 1.



Pregunta rápida

Muestre que se cumple la regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) \right] dx$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)}{2} \left(f(x_0) + f(x_1) \right) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_1) \right)$$

Regla se Simpson

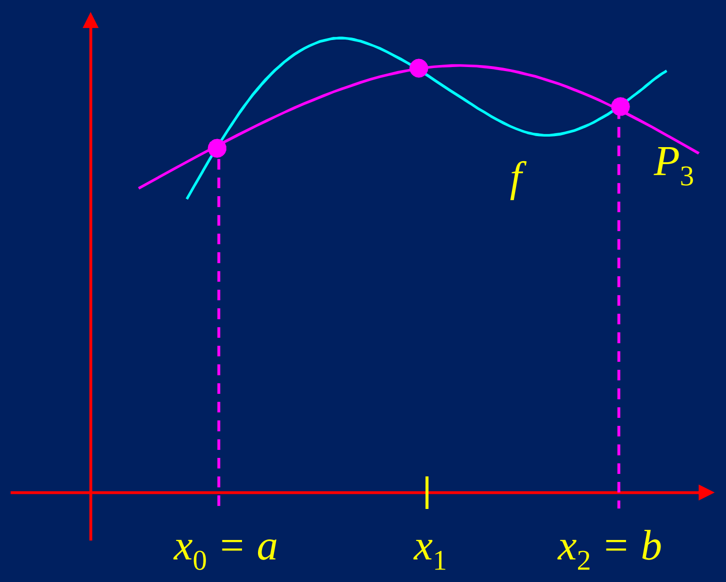
La regla se Simpson se obtiene suponiendo el segundo polinomios de Lagrange con los nodos $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = a + h$, $h = (b - a)/2$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Donde se han despreciado los términos de error.

La fórmula es exacta para polinomios de hasta tercer grado.



Comparación

Comparación entre el valor exacto, la regla del trapecio y la regla de Simpson para diferentes funciones en el intervalo [0 , 2].

f(x)	x^2	x^4	1/(x + 1)	sqrt(1 + x2)	sen x	exp(x)
Valuación exacta	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Trapecio	4.000	16.000	1.333	3.236	0.909	8.389
De Simpson	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Integración numérica compuesta

Integrando e^x por Simpson en [0,4]

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{2}{3}\left[e^0 + 4e^{2}{}'+e^4\right] = 56.76958$$

El error es: 53.59815 – 56.76958 = –3.17143

Separando en dos integrales:

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx$$

$$\approx \frac{1}{3}\left[e^0 + 4e + e^2\right] + \frac{1}{3}\left[e^2 + 4e^3 + e^4\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^0 + 4e + 2e^2 + 4e^3 + e^4\right]$$

$$= 53.86385$$

Dividiendo en 4 intervalos

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

$$\approx \frac{1}{6}\left[e^0 + 4e^{1/2} + e\right] + \frac{1}{6}\left[e + 4e^{3/2} + e^2\right]$$

$$+\frac{1}{6}\left[e^2 + 4e^{5/2} + e^3\right] + \frac{1}{6}\left[e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^0 + 4e^{1/2} + 2e + 4e^{3/2} + 2e^2 + 4e^{5/2} + 2e^3 + 4e^{7/2} + e^4\right]$$

$$= 53.61622$$

El error es: 53.59815 – 53.61622 = –0.01807

Fórmulas de cuadratura cerradas

Fórmulas de cuadratura cerradas

Dados $n+1$ puntos equiespaciados de $[a,b]$, $x_j=a+jh$, $j=0,\dots,n$ $h=(b-a)/(n+2)$. Entonces $\exists\, h \in\,]a,b[$ tal que:

– n par y $f \in C^{n+2}[a,b]$, $s=(x-x_0)/h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \beta_j\, f(x_j) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \int_0^n s^2 (s-1)\cdots(s-n)\,ds$$

– n impar y $f \in C^{n+1}[a,b]$, $s=(x-x_0)/h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \beta_j\, f(x_j) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_0^n s(s-1)\cdots(s-n)\,ds$$

- *n=1* Regla del Trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\eta) \qquad x_0 < \eta < x_1$$

- *n=2* Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\eta) \qquad x_0 < \eta < x_2$$

- *n=3* Regla de Simpson 3/8

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\eta)$$

Donde: $x_0 < \eta < x_3$

- *n=4* Newton-Cotes (5 puntos)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

$$-\frac{8h^5}{945} f^{(vi)}(\eta)$$

Donde: $x_0 < \eta < x_4$

Fórmulas de cuadratura Abiertas

Fórmulas de cuadratura abiertas

- Dados $n+1$ puntos equiespaciados de $[a,b]$, $x_j=a+(j+1)h$, $j=0,\ldots,n$ $h=(b-a)/(n+2)$. Entonces $\exists h \in\,]a,b[$ tal que
  - Si n es par y $f \in C^{n+2}[a,b]$, $s=(x-x_0)/h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_j) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta) \int_{-1}^{n+1} s^2 (s-1)\cdots(s-n)\,ds$$

  - Si n es impar y $f \in C^{n+1}[a,b]$, $s=(x-x_0)/h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_j) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \int_{-1}^{n+1} s(s-1)\cdots(s-n)\,ds$$

Fórmulas de cuadratura abiertas

- $n=0$ Regla del Punto Medio

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\,f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\eta) \qquad x_{-1} < \eta < x_1$$

- $n=1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{3h^3}{4} f^{(ii)}(\eta) \qquad x_{-1} < \eta < x_2$$

- $n=2$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\eta) \qquad x_{-1} < \eta < x_3$$

- $n=3$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right] + \frac{95h^5}{144} f^{(iv)}(\eta)$$

donde: $x_{-1} < \eta < x_4$

Regla compuesta del trapecio

- Fórmula de Trapecios para *N* subintervalos

$h=(b-a)/N, \quad x_k=a+kh \qquad k=0,1,2,\ldots,N$

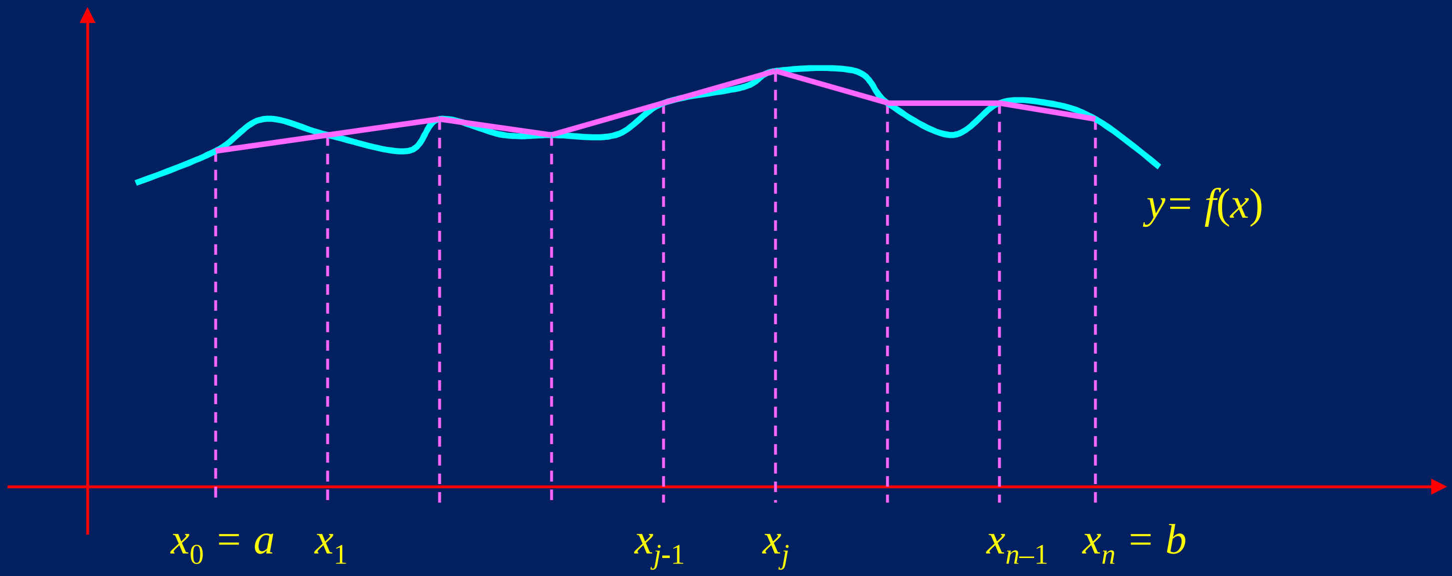
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(x_N) \right]$$

$$E_T = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)$$

Regla compuesta del trapecio

Teorema. Sea $f \in C^4[a, b]$, n par, $h = (b - a)/n$, y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots n$. La regla del trapecio para n subintervalos puede escribirse como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right]$$



Regla compuesta de Simpson

- Fórmula de Simpson para *N* subintervalos

$h=(b-a)/(2m), \quad x_k=a+kh \quad k=0,1,2,\ldots,2m$

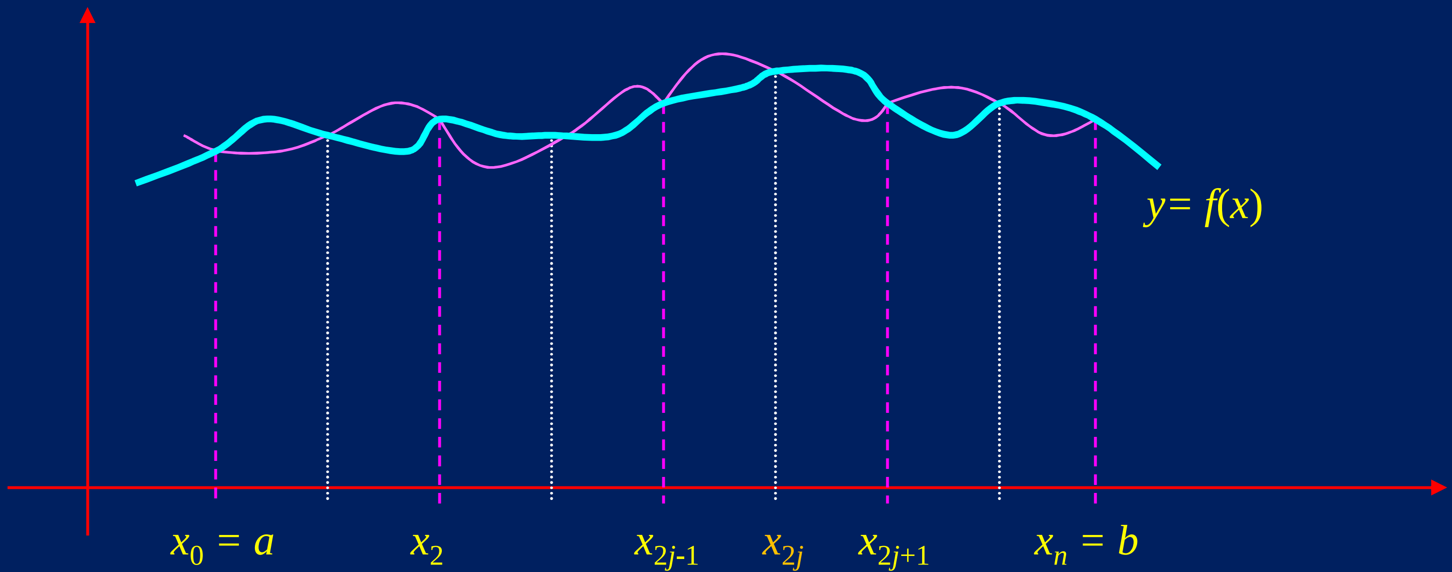
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})+f(x_{2m})\right]$$

$$E_S=-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)$$

Regla compuesta de Simpson

Teorema. Sea $f \in C^4[a, b]$, n par, $h = (b - a)/n$, y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, 2, \ldots n$. La regla de Simpson para n subintervalos puede escribirse como:

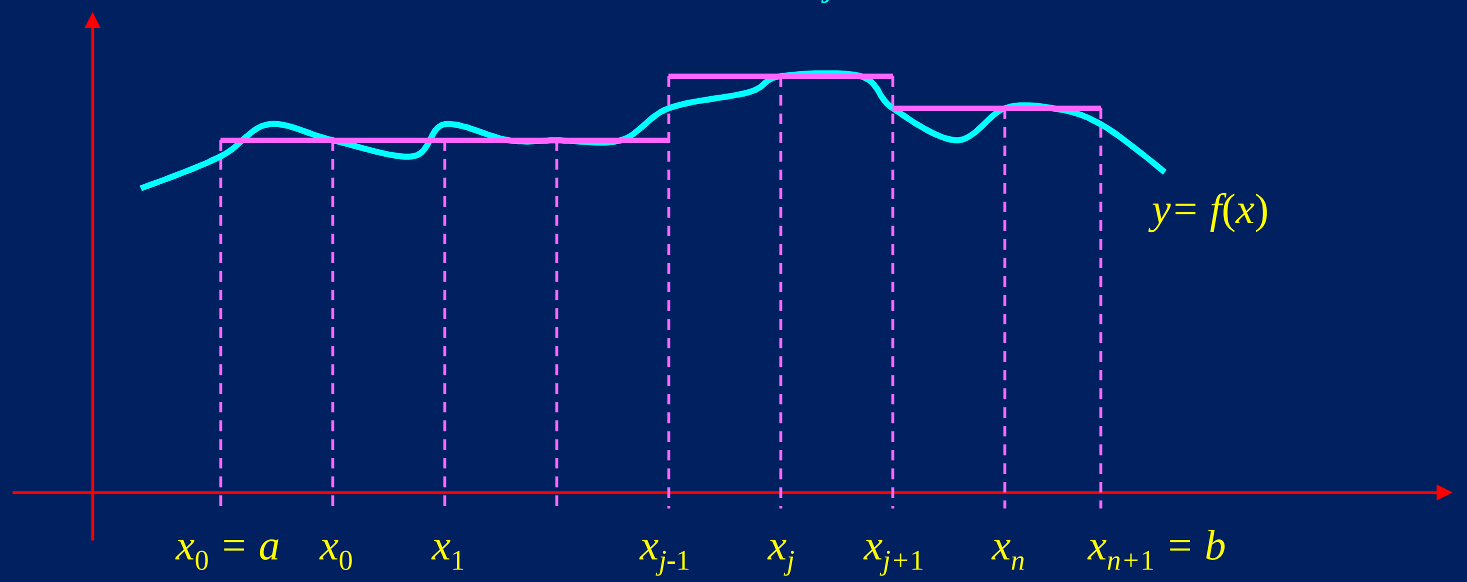
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=0}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right]$$



Regla compuesta del punto medio

Teorema. Sea $f \in C^4[a, b]$, n par, $h = (b - a)/(n+2)$, y $x_j = a + (j+1)h$ para cada $j = -1, 0, 1, 2, \ldots n+1$. La regla de compuesta del punto medio para n subintervalos puede escribirse como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f\left(x_{2j}\right)$$



Datos con espaciamiento irregular

Si los datos están espaciados de forma irregular, como en el caso de datos experimentales, la integración puede llevarse a cabo mediante la aplicación de la regla del trapecio a cada subintervalo.

$$I = h_1 \frac{f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right)}{2} + h_2 \frac{f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)}{2} + \ldots + h_n \frac{f\left(x_{n-1}\right) + f\left(x_n\right)}{2}$$

Donde h_i = ancho del segmento i.

Ejemplo

Determinar la distancia recorrida para los datos siguientes:

t min	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
V m/s	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

```
t = [1 2 3.25 4.5 6 7 8 9 9.5 10];
v = [5 6 5.5 7 8.5 8 6 7 7 5];
suma = 0;
for i=2:length(t)
      suma = suma + (t(i)-t(i-1))*(v(i-1)+v(i))/2;
end
suma

ans = 60.3750
```

GRACIAS POR SU ATENCIÓN