UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com www.mariochuqui.jimdo.com

Métodos Numéricos

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco 2010

Método de Bisección

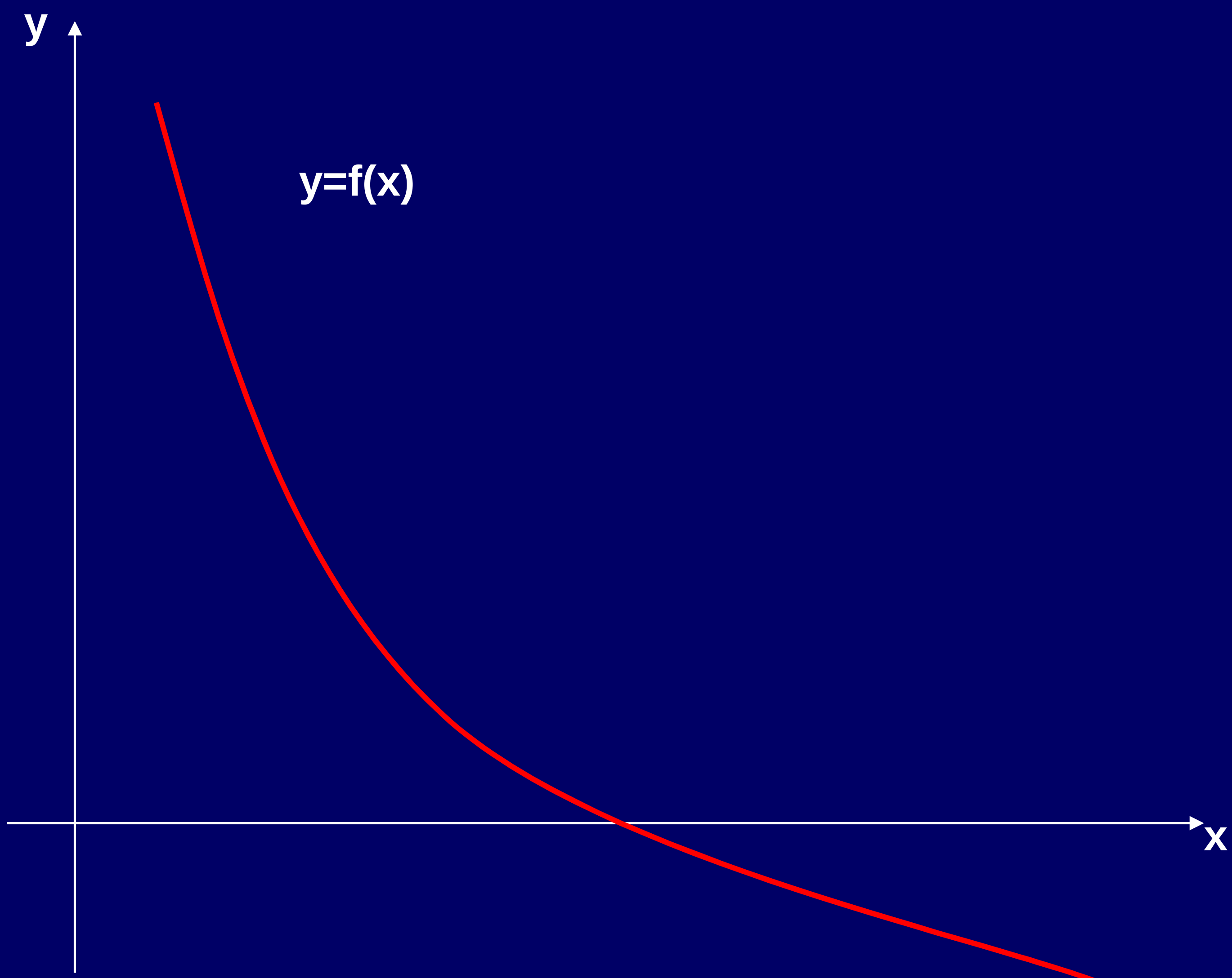
MÉTODO DE BISECCIÓN

El método de bisección conocido también como de corte binario o de búsqueda binaria), de partición en dos intervalos iguales o método de Bolzano, pues se basa en la aplicación directa del Teorema del valor intermedio (Teorema de Bolzano).

Es un método de búsqueda incremental donde el intervalo se divide siempre en dos. Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa el valor de la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina situándola en el punto medio del subintervalo dentro del cual ocurre un cambió de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Explicación gráfica del método de Bisección

MÉTODO DE BISECCIÓN

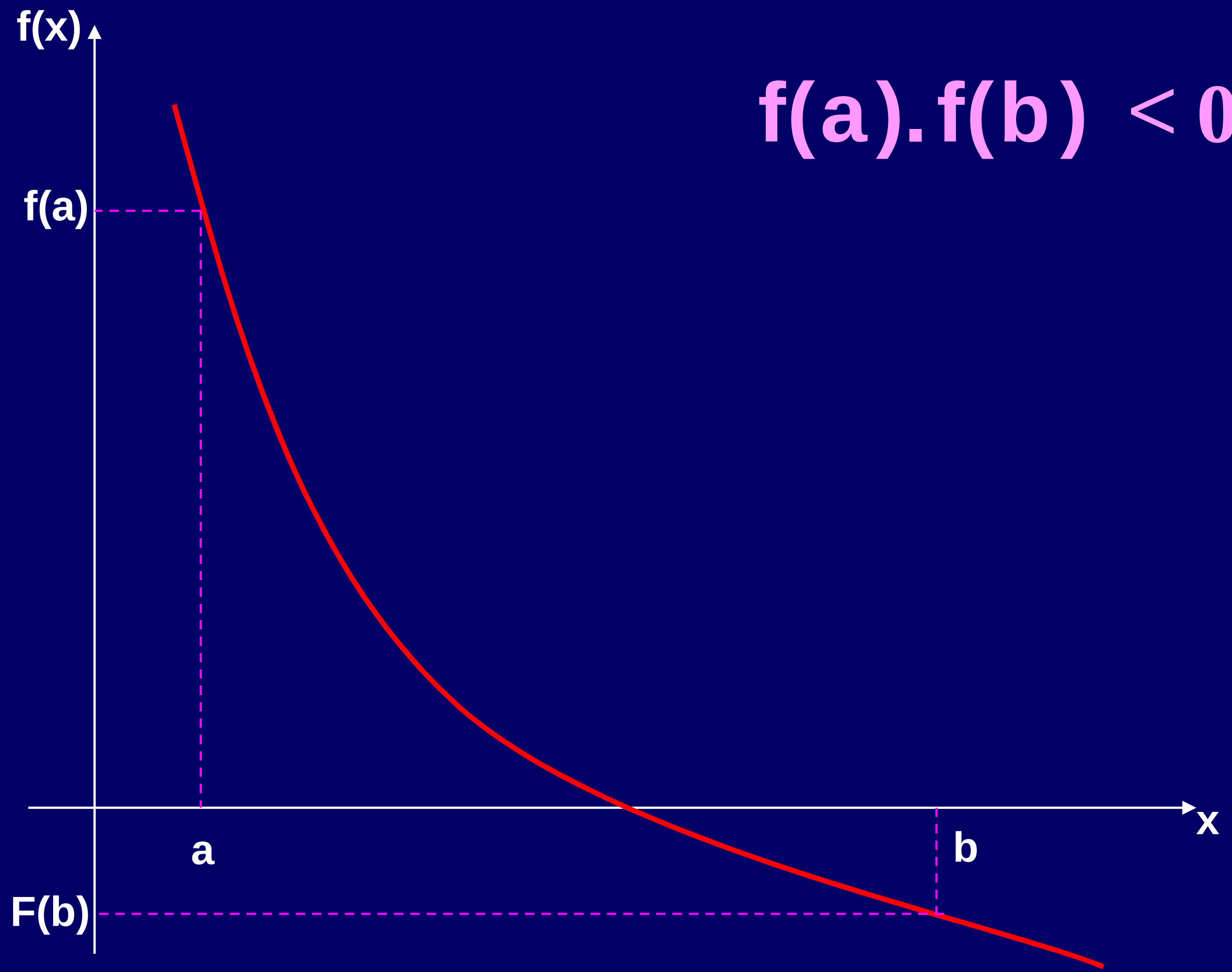


MÉTODO DE BISECCIÓN

1. Consiste en considerar un intervalo (a, b) en el que se garantice que la función tiene raíz (un horquillado)

MÉTODO DE BISECCIÓN

$$f(a).f(b) < 0$$

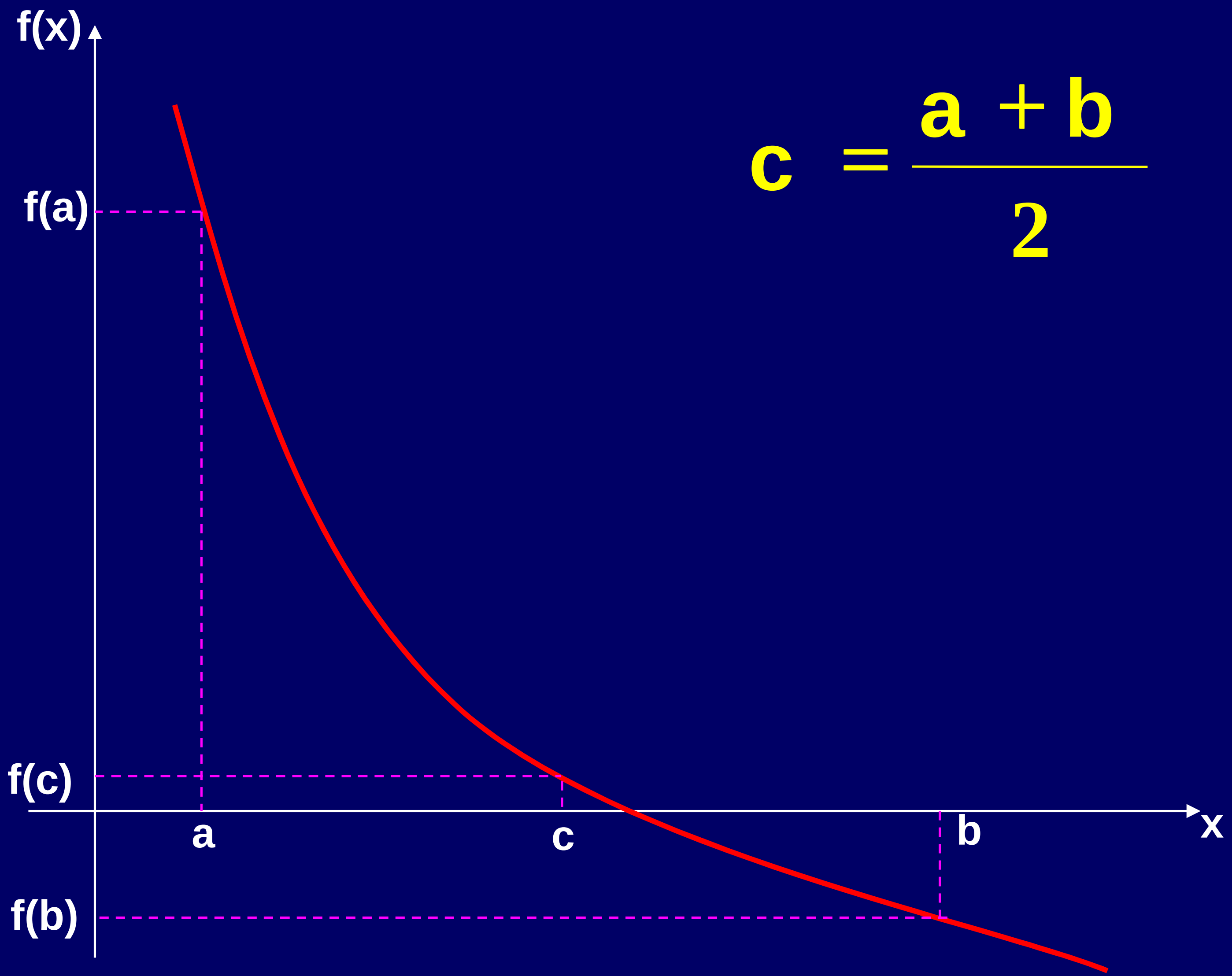


MÉTODO DE BISECCIÓN

1. Consiste en considerar un intervalo (a, b) en el que se garantice que la función tiene raíz, halla un horquillado.
2. El segmento se biseca, tomando el punto de bisección c, que es una aproximación de la raíz buscada.

MÉTODO DE BISECCIÓN

$$c = \frac{a + b}{2}$$



MÉTODO DE BISECCIÓN

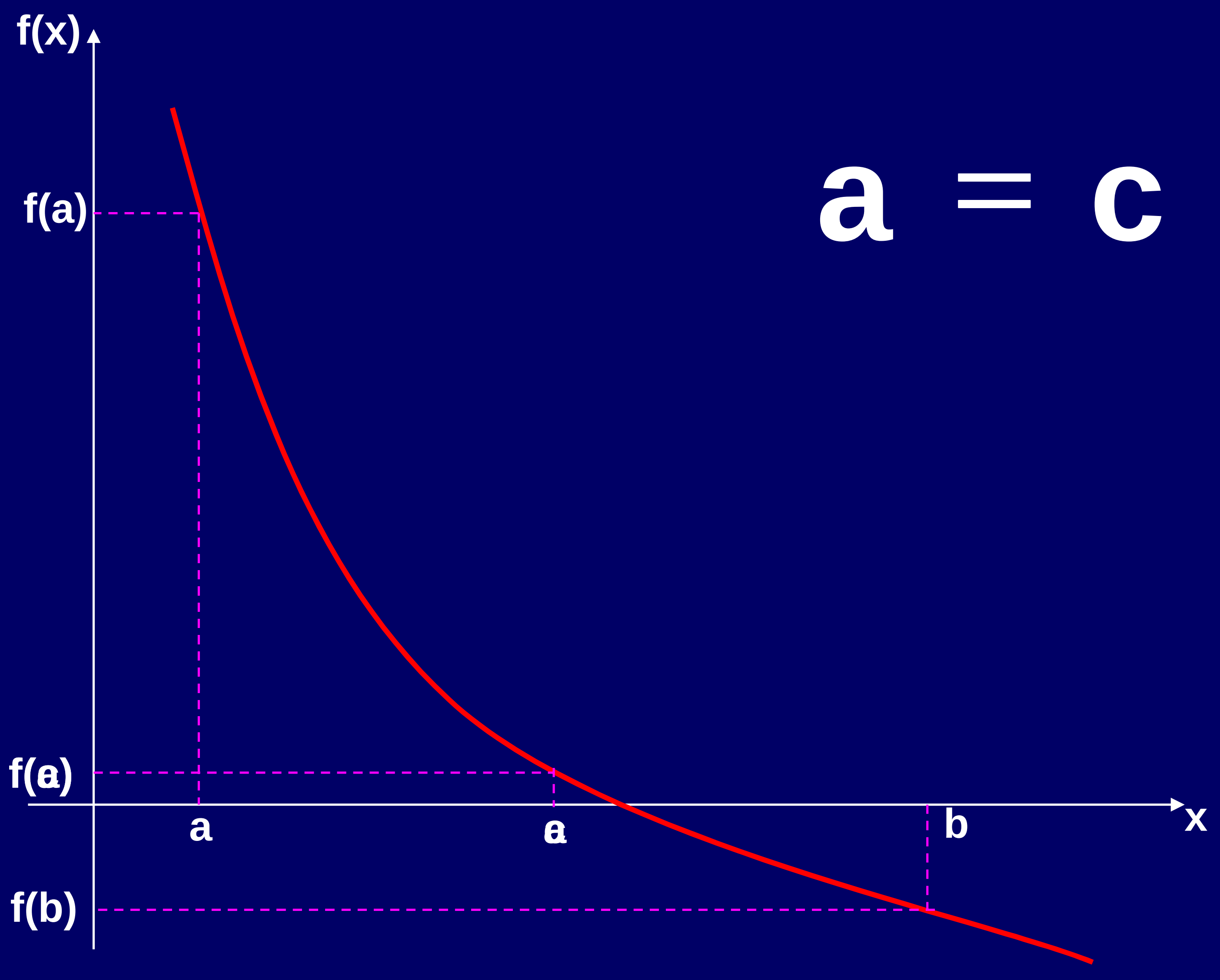
- La fórmula de recurrencia para el método de bisección es el promedio de los valores inferior y superior de los extremos del intervalo:

$$\boxed{c = \frac{a+b}{2}}$$

MÉTODO DE BISECCIÓN

1. Consiste en considerar un intervalo (a, b) en el que se garantice que la función tiene raíz, halla un horquillado.
2. El segmento se biseca, tomando el punto de bisección c, que es una aproximación de la raíz buscada.
3. **Se identifica luego en cuál de los dos intervalos está la raíz.**

MÉTODO DE BISECCIÓN

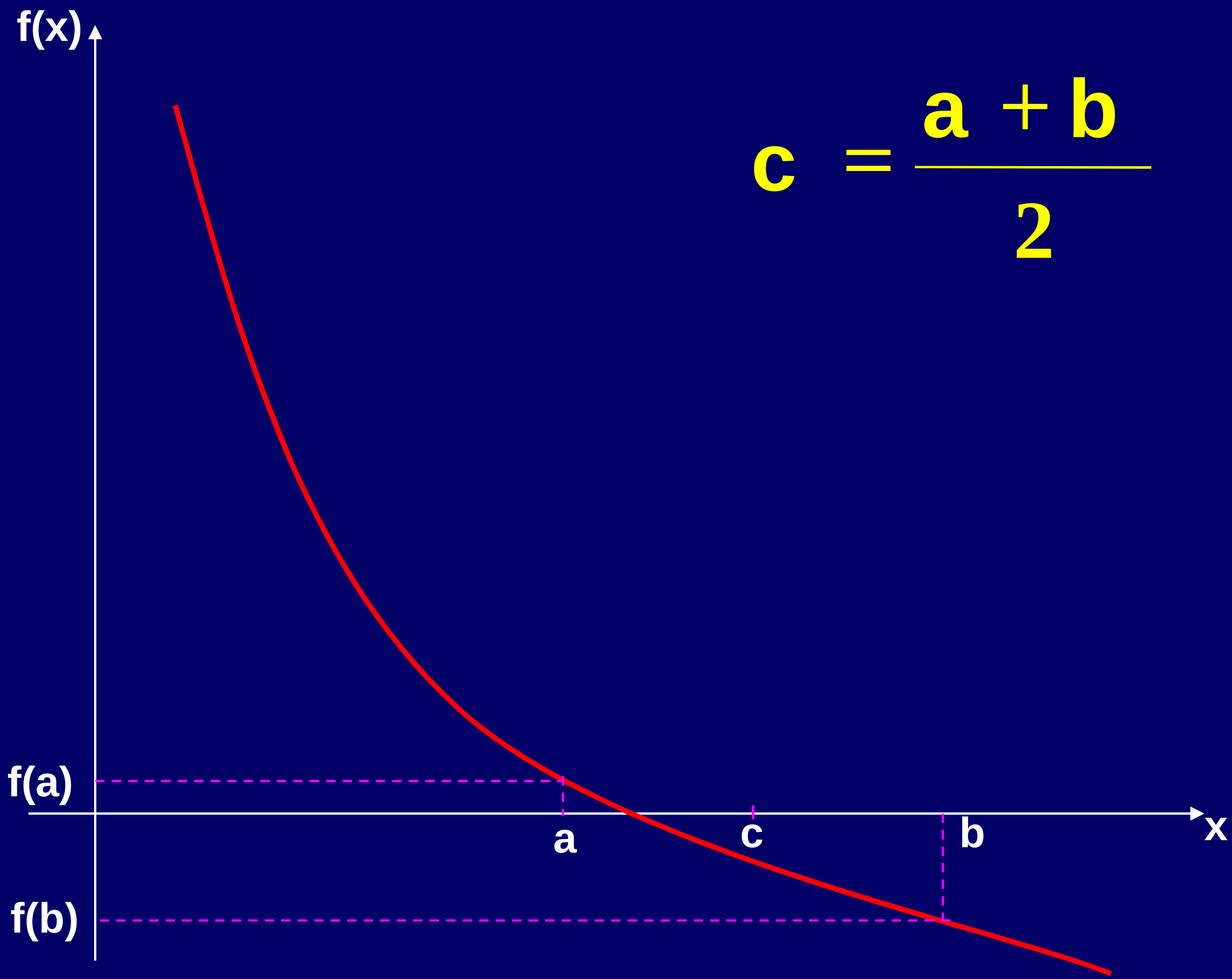


MÉTODO DE BISECCIÓN

1. Consiste en considerar un intervalo (a, b) en el que se garantice que la función tiene raíz, halla un horquillado.
2. El segmento se biseca, tomando el punto de bisección c, que es una aproximación de la raíz buscada.
3. **Se identifica luego en cuál de los dos intervalos está la raíz.**
4. **El proceso se repite n veces, hasta que el punto de bisección c coincide prácticamente con el valor exacto de la raíz.**

MÉTODO DE BISECCIÓN

$$c = \frac{a + b}{2}$$



Método de Bisección
Seudo-código

Seudo-código

```
fa= evalua f(a)
fb=evalua f(b)
if sign(fa)==sign(fb)
              Error: En este intervalo no existe raiz (a,b)
  break;
end
REPETIR
          c=(a+b)/2;
          fc= evalua f(c)

          if sign(fa)==sign(fx)
                    a=c;
                    fa=fc;
            else
                    b=c;
                    fb=fc;
          end

FIN_REPETIR
```

Método de Bisección

en Matlab

Ejercicios y algoritmos

Método de Bisección

Ejercicio 01:

Usar el método de Bisección para hallar un valor aproximado a la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x$$

tomando el intervalo $[0, 1]$

y que los valores de aproximación de cifras significativas sean de 5 y 8 dígitos. Analizar los resultados

Solución:

1.- Crear un archivo **m-file** con el nombre de **f.m**

```
function   y=f(x)
y=exp(– x) – x;
```

2.- Escribir en un archivo m-file la función bisección1.m

Escribir el siguiente algoritmo...

MÉTODO DE BISECCIÓN EN MATLAB

```
function  x = biseccion1(fun,a,b,ndig)
c=0;
tol=0.5*10^-(ndig+1);
fa=feval(fun,a);
fb=feval(fun,b);
iter=1;
if sign(fa)==sign(fb)
   disp('Error: En este intervalo no existe raiz (a,b)');
   break;
end
disp('Método de la bisección');
disp('i              xi ');
while (norm(a-b)> tol)
                c=(a+b)/2;
                fc=feval(fun,c);
                 disp(sprintf('%-3d          %2.15f',iter,c));
                if sign(fa)==sign(fx)
                                a=c;
                                fa=fc;
                    else
                                b=c;
                                fb=fc;
                end
                iter=iter+1;
end
x=c;
```

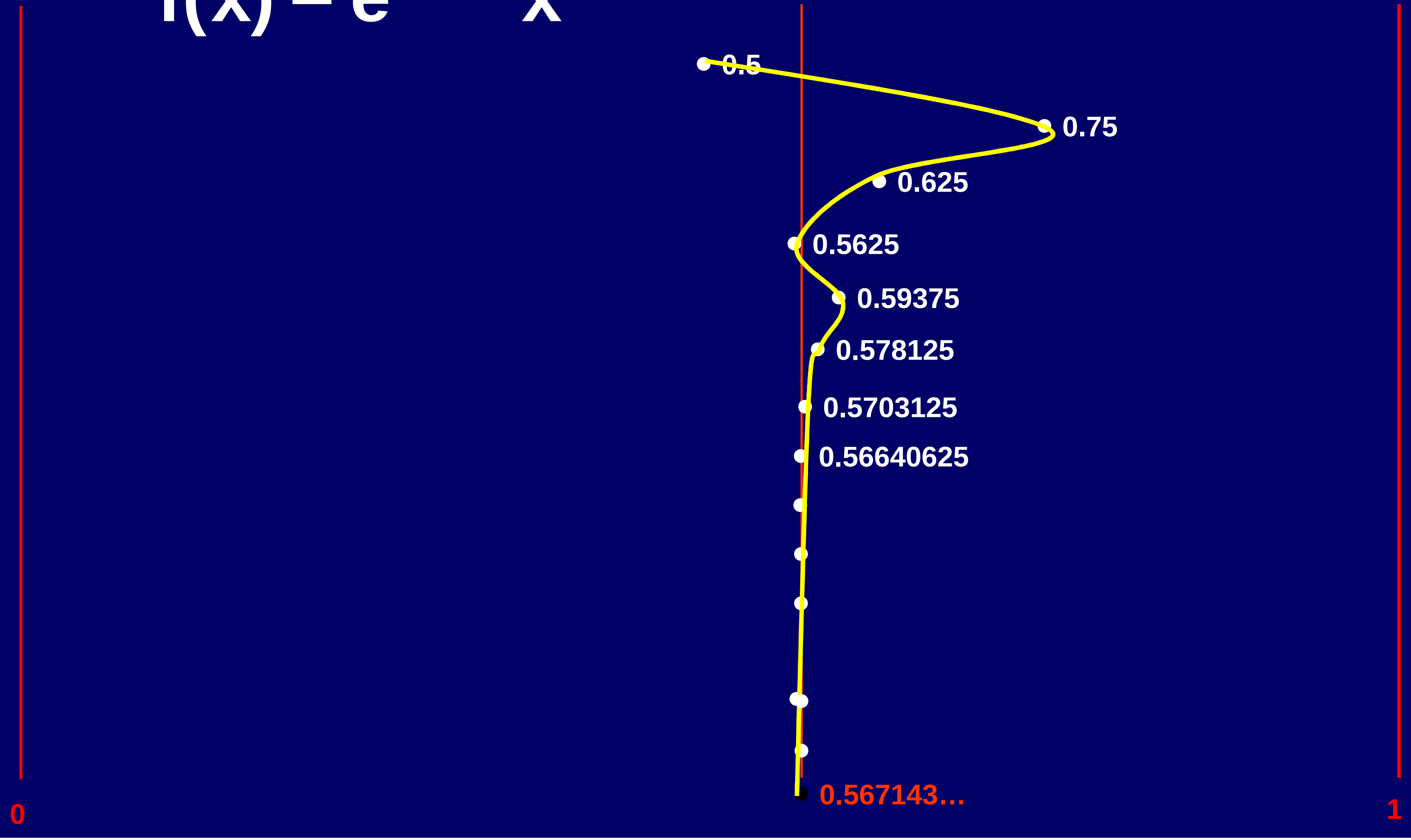
3.- Correr la función con

>> biseccion1(' f ',0,1,5)

>> biseccion1(' f ',0,1,8)

MÉTODO DE BISECCIÓN

$$f(x) = e^{-x} - x$$



Calculo del número de iteraciones necesario para alcanzar la aproximación a la raíz que cumplan el criterio de parada

El método de la bisección permite determinar, sin necesidad de calcular las aproximaciones sucesivas a la raíz, el número de iteraciones necesario para alcanzar la tolerancia (tol).

Este valor se calcula de la siguiente manera:

El método de Bisección, lo que hace es definir una sucesión

$$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_{n-1}, c_n$$

es converge a la raíz tal que $f(c_n) \approx 0$

Por otro lado, observamos que la distancia entre dos puntos sucesivos es:

$$|c_k - c_{k-1}| = \frac{|a-b|}{2^k} \qquad k=2,3,4,\ldots$$

El criterio de parada que utilizamos es:

Mientras $|c_k - c_{k-1}| > tol$ sigue la iteración

Es decir, en el n-ésima iteración se cumple:

$$|c_n - c_{n-1}| \le tol \qquad y \qquad |c_n - c_{n-1}| = \frac{|a-b|}{2^n}$$

Igualando tenemos: $$\frac{|a-b|}{2^n} \le tol$$

Despejando n :

$$\frac{|a-b|}{tol} \le 2^n \quad \Rightarrow \quad Ln\left(\frac{|a-b|}{tol}\right) \le Ln(2^n)$$

$$\Rightarrow \quad Ln\left(\frac{|a-b|}{tol}\right) \le n\ Ln\,2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Ln(2)} Ln\left(\frac{|a-b|}{tol}\right) \le n$$

Por lo tanto, el valor de n que cumple el criterio de convergencia tiene que ser un valor a partir del valor real: $\frac{1}{Ln(2)} Ln\left(\frac{|a-b|}{tol}\right)$

En consecuencia, si queremos el menor valor entero que a partir del cual el criterio de convergencia se verifique este valor será:

$$n_{max} = \left[\!\left[\frac{1}{Ln\,2} Ln\left(\frac{|a-b|}{tol}\right) \right]\!\right] + 1$$

Método de Bisección

Ejercicio 02:

Usar el método de Bisección para hallar un valor aproximado a la raíz de

$$h(x) = e^{-x} - \ln x$$

tomando el intervalo $[1, 2]$

Ejercicio 03:

Usar el método de Bisección para hallar un valor aproximado a la raíz de

$$g(x) = \arctan(x) + x - 1$$

tomando el intervalo $[0, 1]$

En ambos ejercicios los valores de aproximación de cifras significativas sean de 6 y 12 dígitos. Además, considerar en la función de bisección el numero de iteraciones necesarias para lograr loas exigencias de las cifras significativas e indicar en el resultado dicho valor. Analice los resultados.

Solución:

1.- Crear un archivo **m-file** con el nombre de **h.m**

```
function   y=h(x)
y=exp(– x) – log(x);
```

2.- Crear un archivo **m-file** con el nombre de **g.m**

```
function   y=g(x)
y=atan( x) +x–1;
```

Escribir en un archivo m-file la función bisección2.m

Escribir el siguiente algoritmo...

MÉTODO DE BISECCIÓN EN MATLAB

```
function  x = biseccion2(fun,a,b,ndig)
c=0;
tol=0.5*10^-(ndig+1);
fa=feval(fun,a);
fb=feval(fun,b);
if sign(fa)==sign(fb)
      disp('Error: En este intervalo no existe raiz (a,b)');
      break;
end
disp('Método de la bisección');
disp('i            xi ');
Nmax=floor((log(norm(b-a)/tol))/log(2))+1;
iter=1;
while iter <= Nmax
            c=(a+b)/2;
            fc=feval(fun,c);
            disp(sprintf('%-3d        %2.15f',iter,c));
            if sign(fa)==sign(fx)
                        a=c;
                        fa=fc;
            else
                        b=c;
                        fb=fc;
            end
            iter=iter+1;
end
x=c;
```

Correr la función biseccion2 en la línea de comandos

Para el ejercicio 1

```
>> biseccion2(' h ',1,2,6)

>> biseccion2(' h ',1,2,12)
```

Para el ejercicio 2

```
>> biseccion2(' g ',0,1,6)

>> biseccion2(' g ',0,1,12)
```

Método de Bisección

Ejercicio 04:

Desarrollar el algoritmo de Bisección en donde se pueda ingresar la función por teclado (no como un archivo m-file)

Resolver los ejercicios anteriores con dicho método.

Solución:

Escribir el siguiente algoritmo...

MÉTODO DE BISECCIÓN EN MATLAB

```
f_pantalla=input('ingrese la funcion, entre apostrofos: ');
x=input('ingrese el intervalo en que se encuentra la raiz, en la forma [a b]: ');
ndig=input('numero de digitos significativos de aproximacion a mostrar: ');
toler=5*10^-(ndig+1);
fun=inline(f_pantalla);
a=x(1);
b=x(2);
fa=feval(fun,a);
fb=feval(fun,b);
if sign(feval(fun,a))==sign(feval(fun,b))
   fprintf('no se cumplen las condiciones del terorema del valor intermedio \n')
   fprintf('y no se puede usar el metodo de biseccion \n')
else
   iter=1;
   while (norm(a-b)*0.5 > toler)
      c=(a+b)/2;
      fc=feval(fun,c);
      disp(sprintf('%-3d          %2.15f',iter,c));
      if sign(fb)==sign(fc)
         b=c;
         fb=fc;
      else
         a=c;
         fa=fc;
      end
      iter = iter + 1;
   end
      fprintf('la raiz buscada es x = %2.10f ',c)
end
```

GRACIAS POR SU ATENCIÓN

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

http://www.mariochuqui.jimdo.com

UNSAAC