UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

UNSAAC

Lic. Guillermo Mario, Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com **www.mariochuqui.jimdo.com**

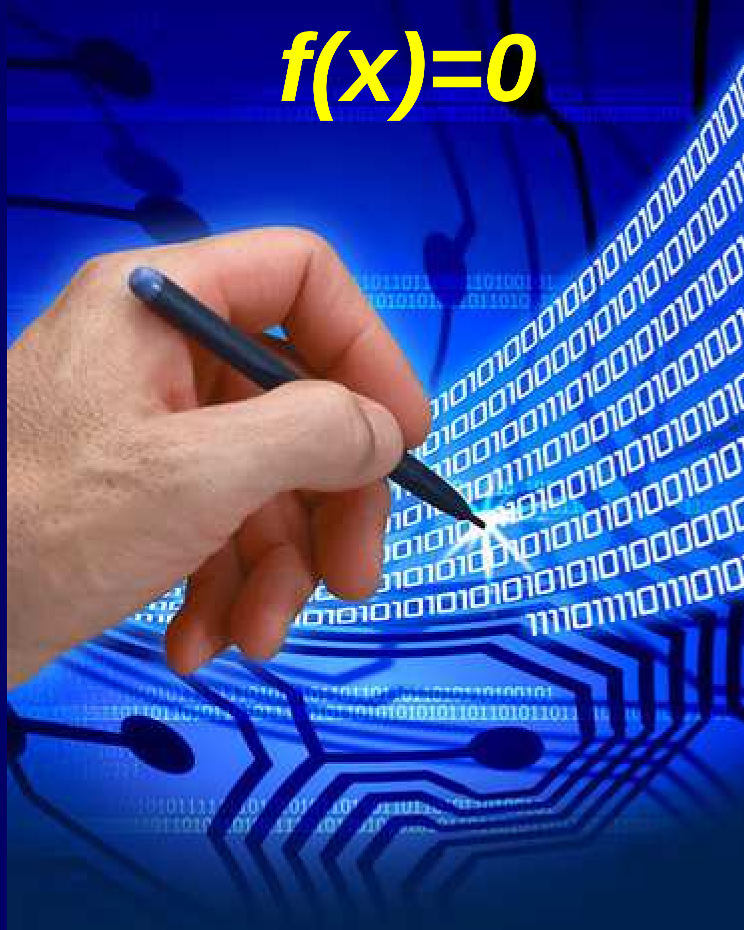
Métodos Numéricos con MatLab

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

Aproximación a raíces de ecuaciones no lineales

$f(x)=0$



Temario

1. Introducción

- Un problema cotidiano

- Un problema matemático

2. Análisis de la aplicación de un Método Numérico

3. Procedimiento general para buscar el valor que aproxima a la raíz

4. La estimación inicial

5. Procedimiento para conseguir la Estimación inicial

- horquillado de la raíz

6. La función brackPlot()

7. Algoritmos que refinan la estimación inicial

- clasificación de los algoritmos

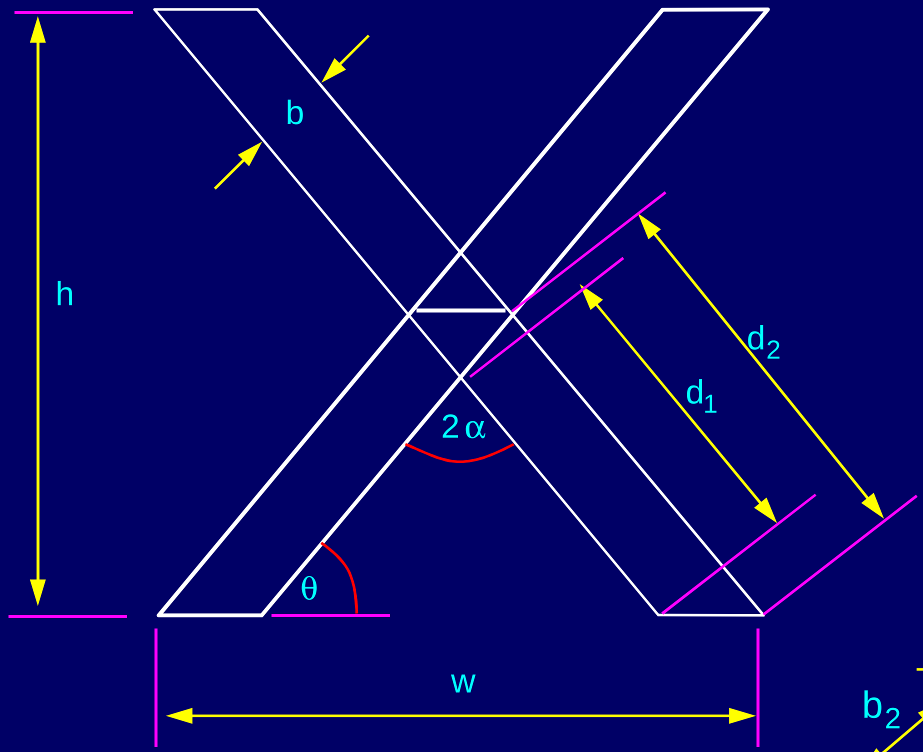
Introducción

- Un problema cotidiano
- Un problema matemático

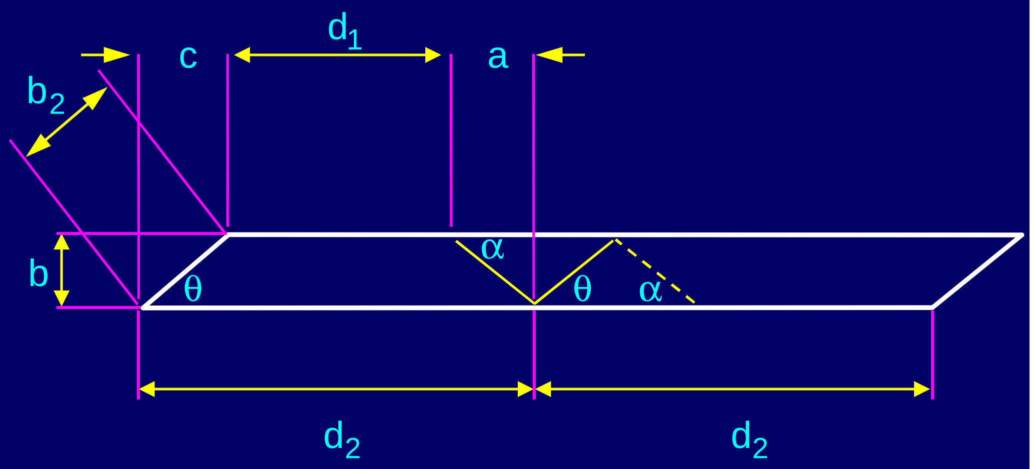
Un problema cotidiano

Mesa de Picnic

Diagrama de la Mesa de Picnic



Ensamblaje de la pata



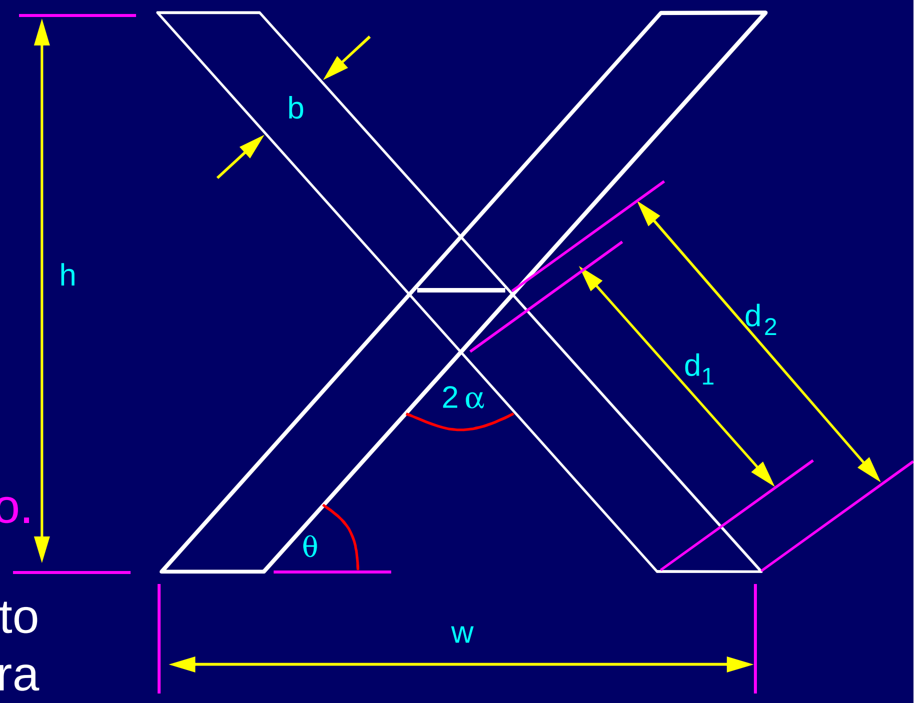
Detalles de una pata

Problema:

Dada las dimensiones completas de w y h, y la dimensión del material b

¿cuál es el valor de θ?

Análisis del problema:



Las dimensiones de una pata de la mesa de picnic satisfacen

$$w \cos\theta = h \operatorname{sen}\theta + b$$

Una solución analítica para

$$\theta = f(w, h, b)$$, pero no es obvio.

Podemos pensar en usar una procedimiento de encontrar raíces numéricas para encontrar el valor de θ que satisface:

$$f(\theta) = w \operatorname{sen}\theta - h\cos\theta - b = 0$$

Es decir, hallar las raíces de la ecuación $f(\theta) = 0$

Cualquier función de una variable puede ser expresada en la forma: $f(x) = 0$

Un problema matemático:

Hallar la raíz de la ecuación:

$$\cos(x) - x = 0$$

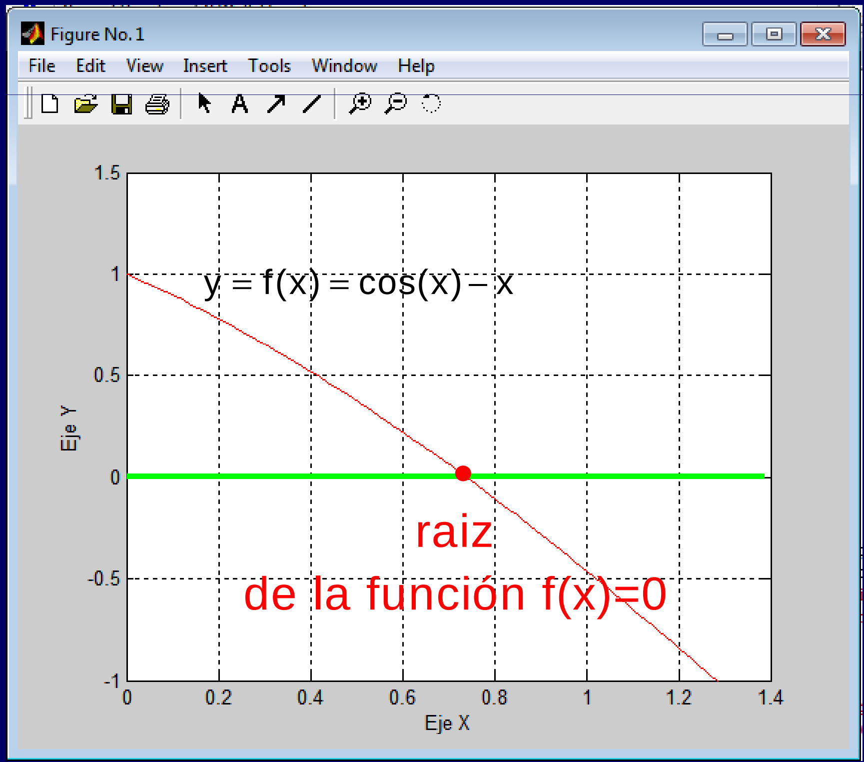
Análisis del problema:

Si expresamos como una función:

$$f(x)=\cos(x) - x$$

La ecuación dada, es equivalente a pensar en hallar el valor de x, de la gráfica de la función

$f(x)=\cos(x) - x$ **intersecta al eje X**



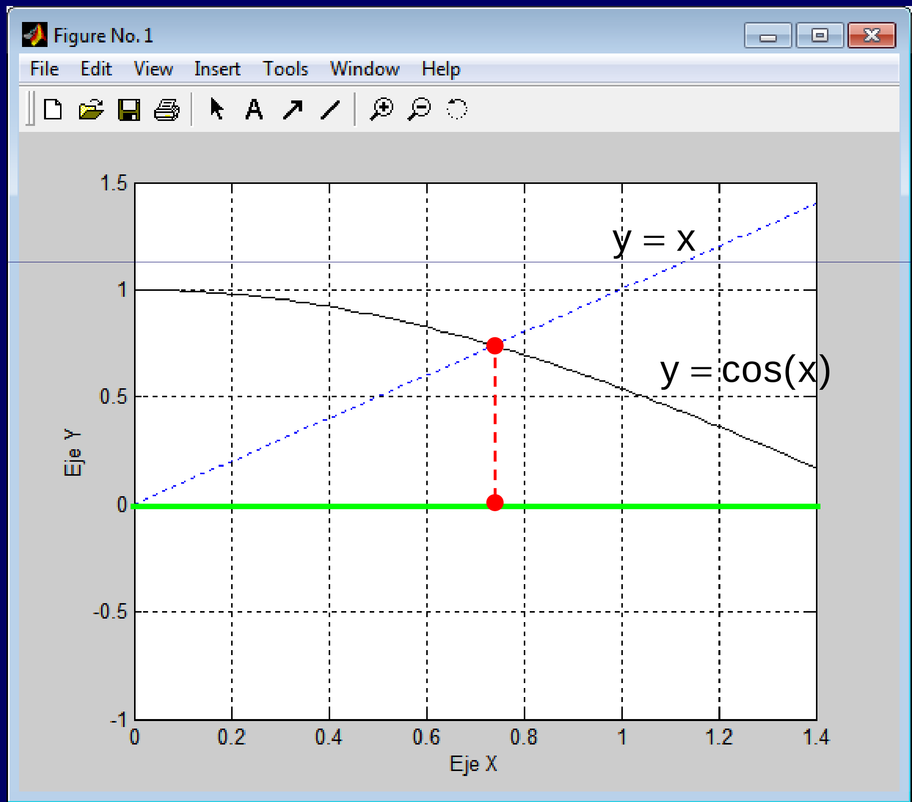
Por otro lado, la ecuación: $\cos(x) - x = 0$

puede ser escrita como:

$$x=\cos(x)$$

Eso significa que estamos igualando dos funciones $y=\cos(x)$, con la función identidad $y=x$

Graficando dichas funciones sería:

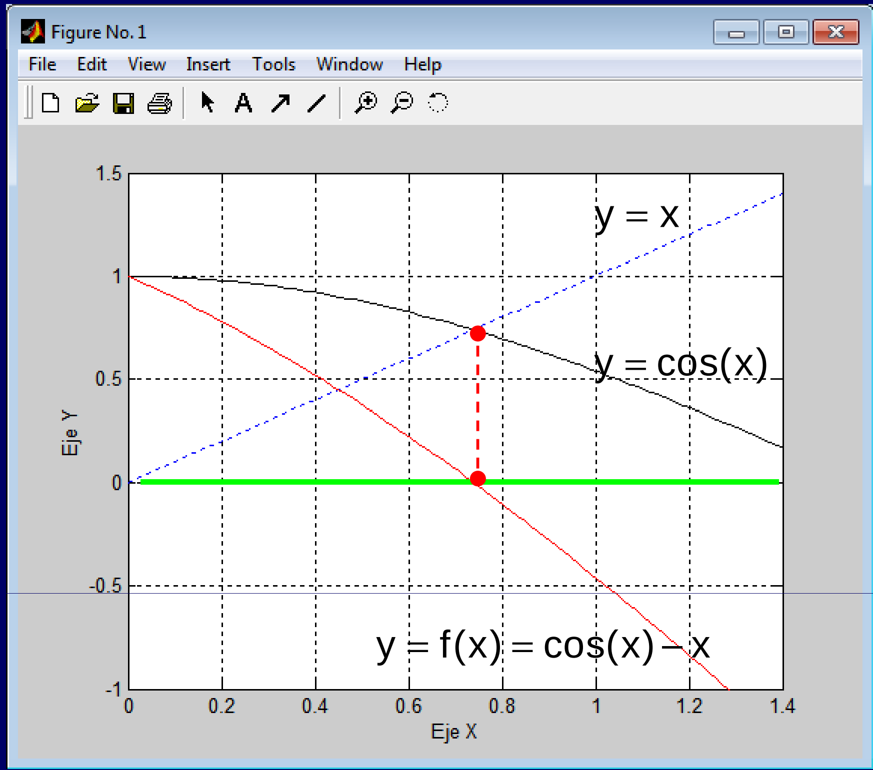


Y la intersección de dichas funciones, según el gráfico, consiste en calcular un valor en en el dominio de ambas funciones, de tal manera que satisfaga las dos ecuaciones.

Y hallar ese valor, significa resolver la ecuación $\cos(x) - x = 0$

¿ Y que relación tiene ese valor con la función $f(x)=\cos(x) - x$?

El punto de intersección que satisface a las ecuaciones y=cos(x) con y=x, es el mismo que de la función f(x)=cosx-x, cuando interseca X.



En conclución:

Pensar en encontrar un valor que llamamos raíz que satisface la ecuación cosx-x=0

Es equivalente

Y también es equivalente

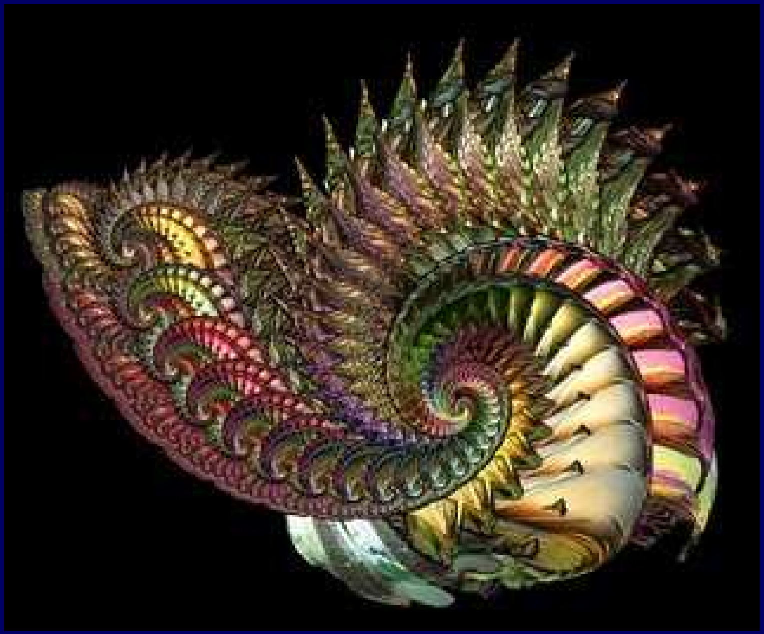
Es equivalente en hallar el valor que satisface esta otra ecuación x=cos(x)

En hallar el valor en el dominio de la función f(x)=cosx-x, tal que: f(x)=0

Análisis de la aplicación de un Método Numérico

Si escogemos algún método para resolver el problema de hallar una aproximación al valor de la raíz de una ecuación no lineal, debemos de tener las siguientes consideraciones generales:

- ¿La función es complicada para ser evaluada?
  - ¿Es una función polinomial?
  - ¿ La función tiene puntos singulares?
- ¿Cuánta precisión se necesita?
- ¿Qué tan rápido y robusto debe ser el método?



NOTA:

No hay método de encontrar raíz que sea mejor en todas las situaciones.

Procedimiento general para buscar el valor que aproxima a la raíz

La estrategia básica es:

1. Plotear la función.

Ploteando te provee una suposición inicial, e identifica partes problematicas de la función

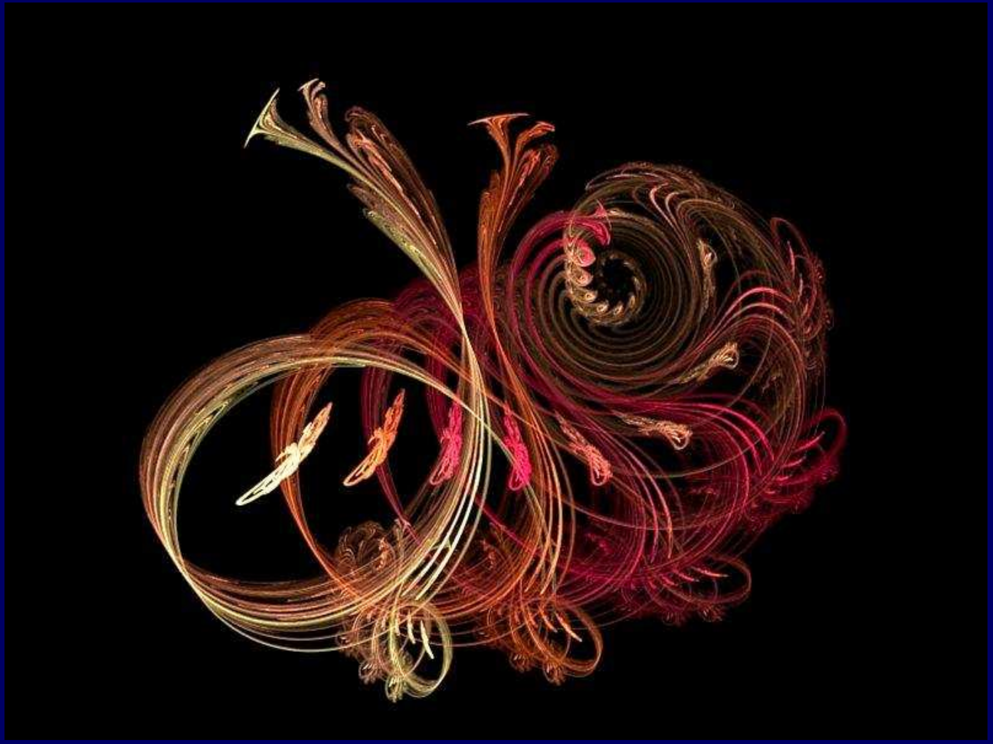
2. Seleccionar una estimación inicial.

3. Aplicar un algoritmo para encontrar la raíz

Es decir, refinar iterativamente la estimación inicial.

La Estimación inicial

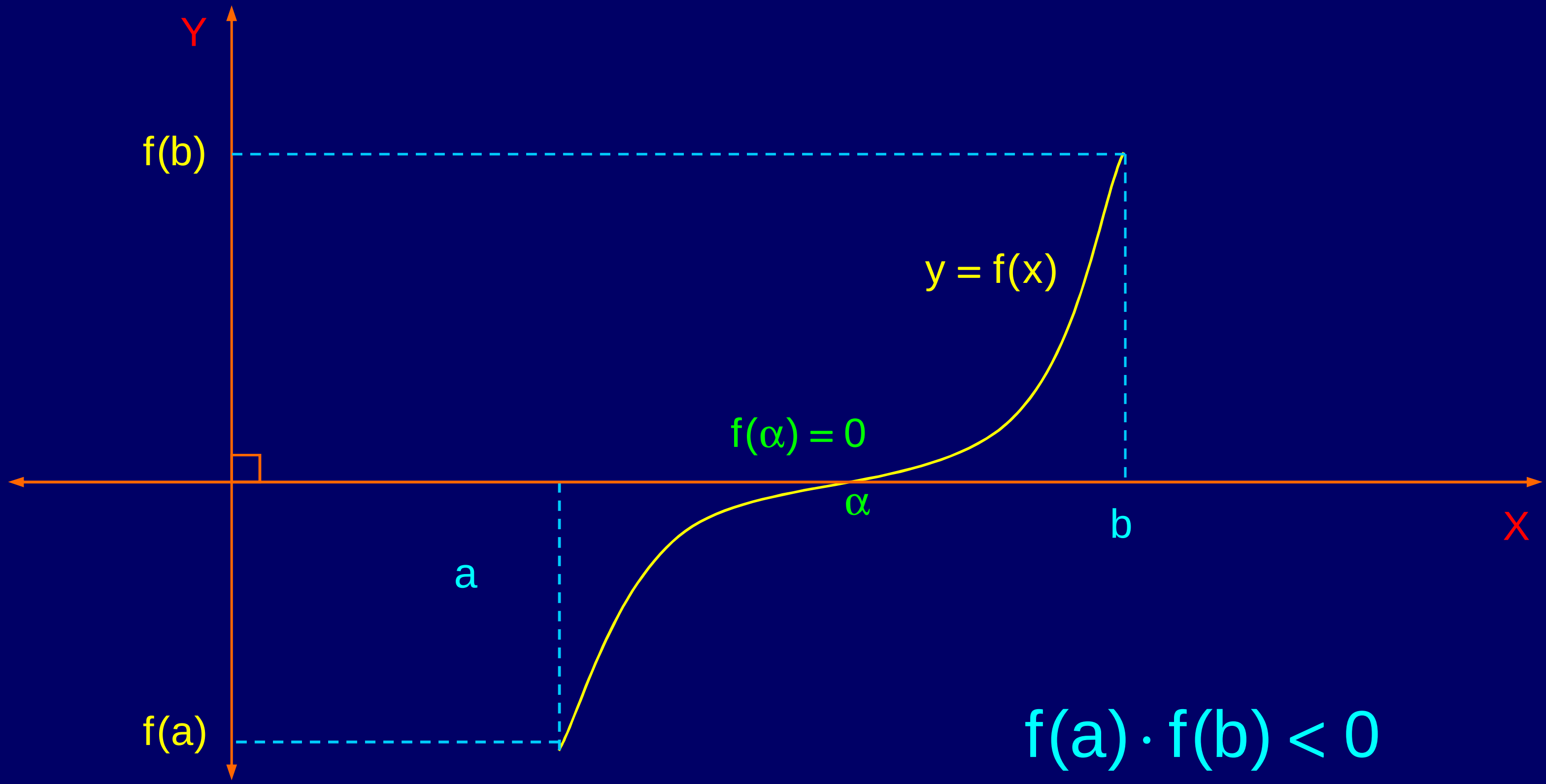
¿Qué es una Estimación inicial?



Conseguir un intervalo pequeño donde posiblemente halla alguna raíz.

¿Cómo asegurarnos que en un intervalo dado existe una raíz?

Estaremos seguros que en un intervalo dado existe una raíz, si los extremos de dicho intervalo evaluados mediante la función, son valores de distinto signo.



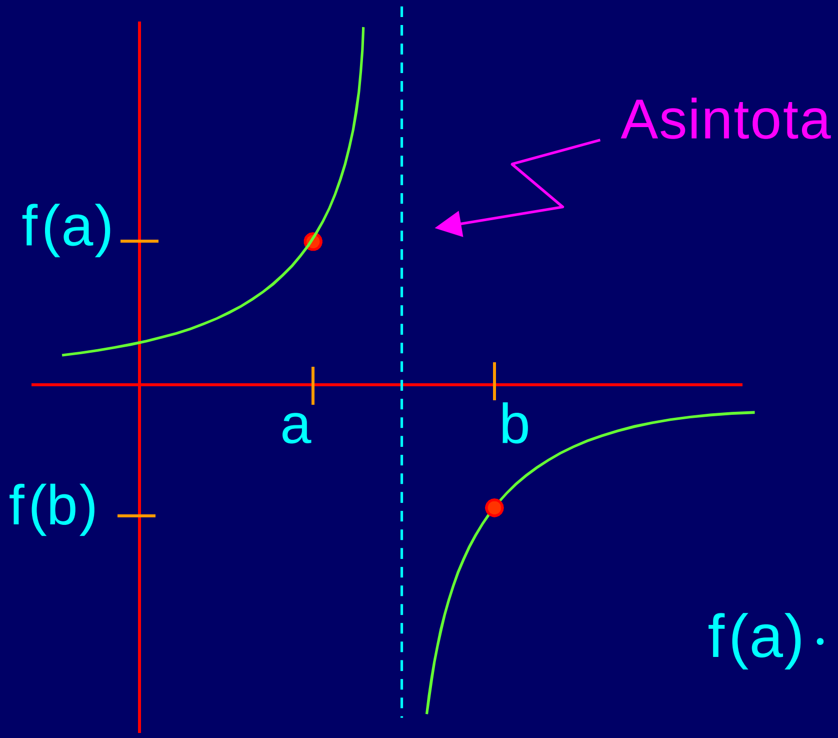
$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

Definición

Diremos que una raíz de una ecuación f(x)=0 está horquillada en el intervalo [a, b], si y solo sí f(a) y f(b) tienen signos opuestos.

CUIDADO!!

Un cambio de signo también ocurre para cuando la función tiene puntos singularidades.



$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

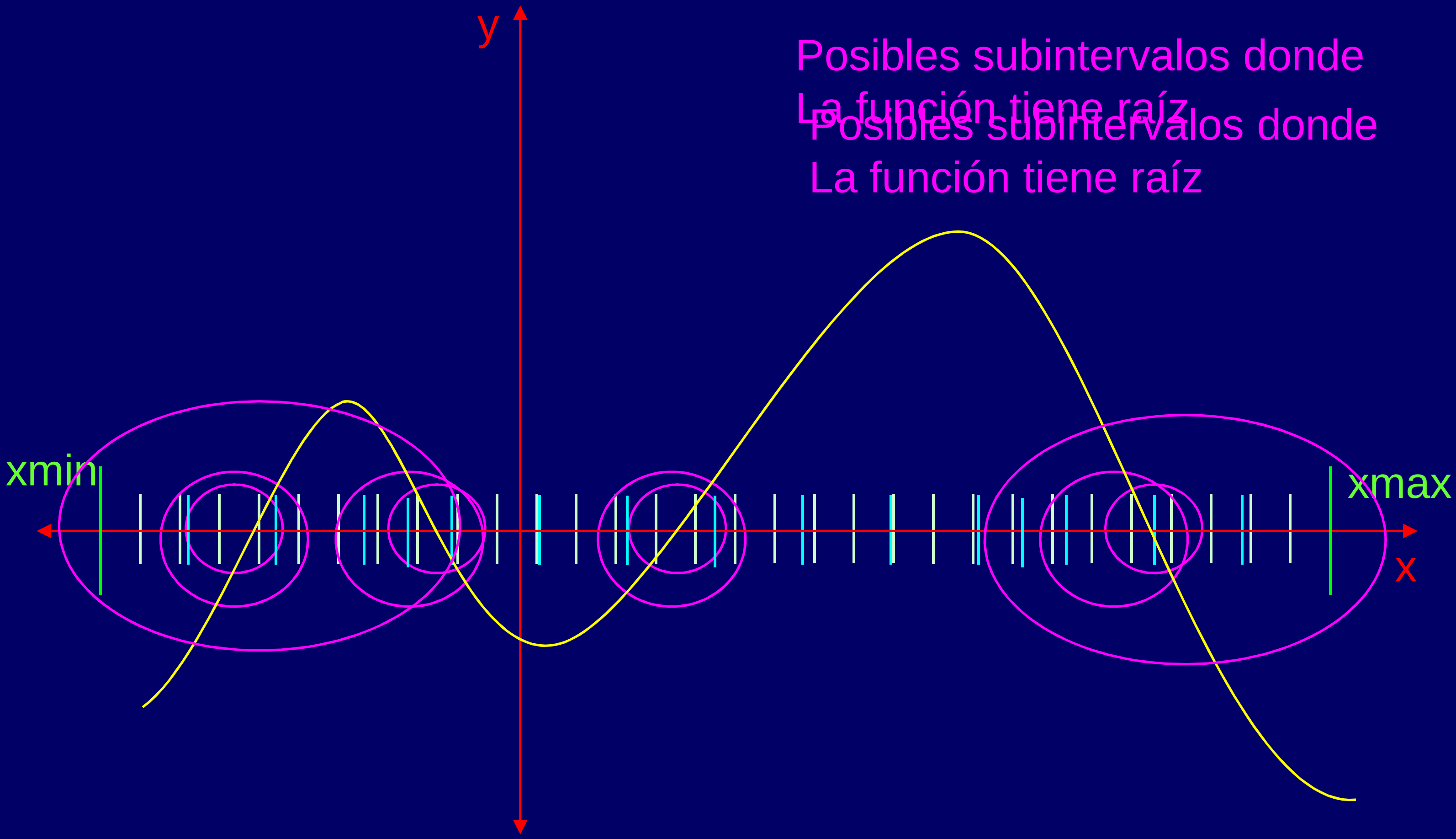
NOTA

El horquillado es usado para hacer suposiciones iniciales de las raíces, no exactamente para estimar los valores de las raíces.

Procedimiento para conseguir la Estimación inicial

Tomaremos un intervalo grande cualquiera, luego lo subdividiremos en intervalos mucho más pequeños y probaremos en los extremos de cada uno de los subintervalos evaluándolos en la función para ver si hay un cambio de signo.

Procedimiento gráfico de la estimación inicial



Consideraremos:

n : Número de subintervalos

dx : Longitud de cada intervalo

$$dx = \frac{|xmax - xmin|}{n}$$

Seudo-código del horquillado de una raiz

Datos de entrada:

xmin : Menor valor del intervalo a evaluar

xmax Mayor valor del intervalo a evaluar

n : Numero de intervalos a subdividir [xmin, xmax]

$a \leftarrow xmin$

$b \leftarrow xmax$

$dx \leftarrow (xmax - xmin)/n$

$xleft \leftarrow xmin$

$i \leftarrow 0$

while $i < n$

$i \leftarrow i + 1$

$xright \leftarrow xleft + dx$

$fa \leftarrow f(xleft)$

$fb \leftarrow f(xright)$

Evalua los extremos del subintevalo mediante la función f

Si fa y fb son de signos contrarios

Imprimir los valores de a y b [a b]

end_Si

$xleft \leftarrow xright$

end_while

Algoritmo del horquillado de la raiz

MATLAB

Algoritmo 01 **horquillado de Raíces**

```
function horquilladof(xmin, xmax, n)
% xmin, xmax: Es el dominio donde la funcion se prueba
% n : numero de subintervalos de [xmin xmax] en que se van a probar
a=xmin;
b=xmax;
dx = (xmax - xmin)/n;
xleft = xmin;
i = 0;
while i < n
        i = i + 1;
        xright = xleft + dx;
        fa=f(xleft);
        fb=f(xright);
  if fa*fb < 0          % verifica el cambio de signo
        a=xleft;
        b=xright;
        disp([a b]);
  end
  xleft = xright;
end
```

NOTA: Esta prueba es susceptible al underflow.

Algoritmo 02 **horquillado de Raices**

```
function horquilladof(xmin, xmax, n)
% xmin, xmax: Es el dominio donde la funcion se prueba
% n : numero de subintervalos de [xmin xmax] en que se van a probar
a=xmin;
b=xmax;
dx = (xmax - xmin)/n;
xleft = xmin;
i = 0;
while i < n
        i = i + 1;
        xright = xleft + dx;
        fa=f(xleft);
        fb=f(xright);
        if sign(fa)~=sign(fb)        % verifica el cambio de signo
            a=xleft;
            b=xright;
            disp([a b]);
        end
       xleft = xright;
end
```

OBS: Una mejor prueba usa la función sign() incorporada (En el MatLab)

Ejercicios

Hallar las estimaciones iniciales, los intervalos donde podrían encontrarse alguna raíz de la ecuación f(x)=0

a) $f(x) = x - x^{1/3} - 2$

$x - x^{1/3} - 2 = 0$

b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

En el intervalo desde:

Xmin=-100, xman= 100

c) $f(x) = e^{-x} - x$

$e^{-x} - x = 0$

La función brackPlot

(The brackPlot Function)

función

Toolbox

Numerical Methods with Matlab (NMM)

La función brackPlot

• Busca los horquillados de la f(x) definidas por el usuario
• Plotea los horquillados y a f(x)
• Devuelve los horquillados en una matriz de dos columnas

Sin taxis:

```
brackPlot('myFun',xmin,xmax)
brackPlot('myFun',xmin,xmax,nx)
```

Donde:

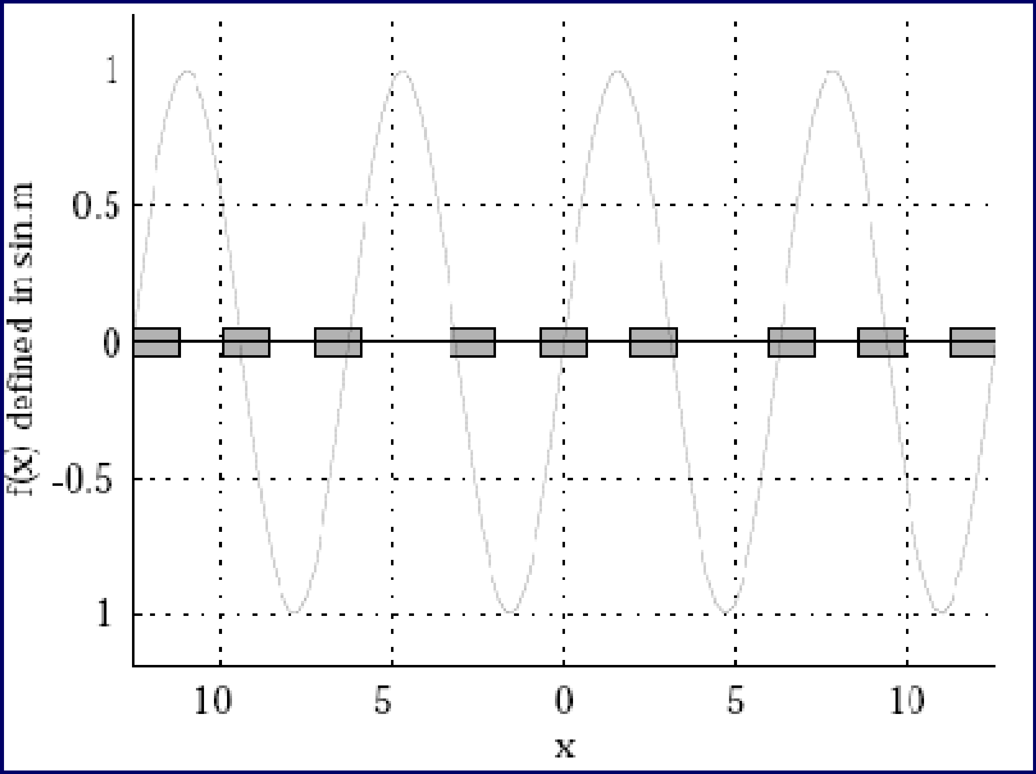
myFun es el nombre de un m-file que evalua f(x)
xmin, xmax define el rango del eje x a buscar
nx es el número de subintervalos a usar en [xmin,xmax] comprobando los cambios de signo de f(x).
Predeterminado: nx= 20

*Aplicación la Función **brackPlot** a sin(x)*

>> Xb = brackPlot('sin',-4*pi,4*pi)

Xb =

-12.5664 -11.2436
-9.9208 -8.5980
-7.2753 -5.9525
-3.3069 -1.9842
-0.6614 0.6614
1.9842 3.3069
5.9525 7.2753
8.5980 9.9208
11.2436 12.5664



Aplicar brackPlot para la función definida por el usuario (1)

Resolver: $f(x) = x - x^{1/3} - 2 = 0$

Necesitamos la función m-file para evaluar f(x) para cualquier valores escalar o vector de x.

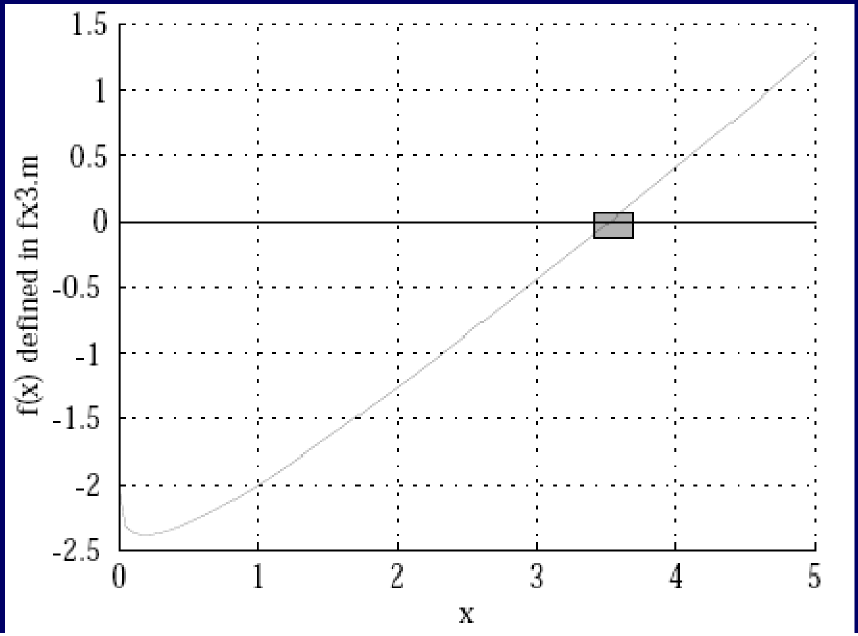
Archivo fx3.m:

```
function f = fx3(x)
% fx3 Evaluates f(x) = x - x^(1/3) - 2
f = x - x.^(1/3) - 2;
```

Corra brackPlot , con fx3 como la función de entrada

```
>> brackPlot('fx3', 0, 5)
ans =
3.4000 3.6000

>> Xb = brackPlot('fx3', 0, 5)
Xb =
3.4211 3.6842
```

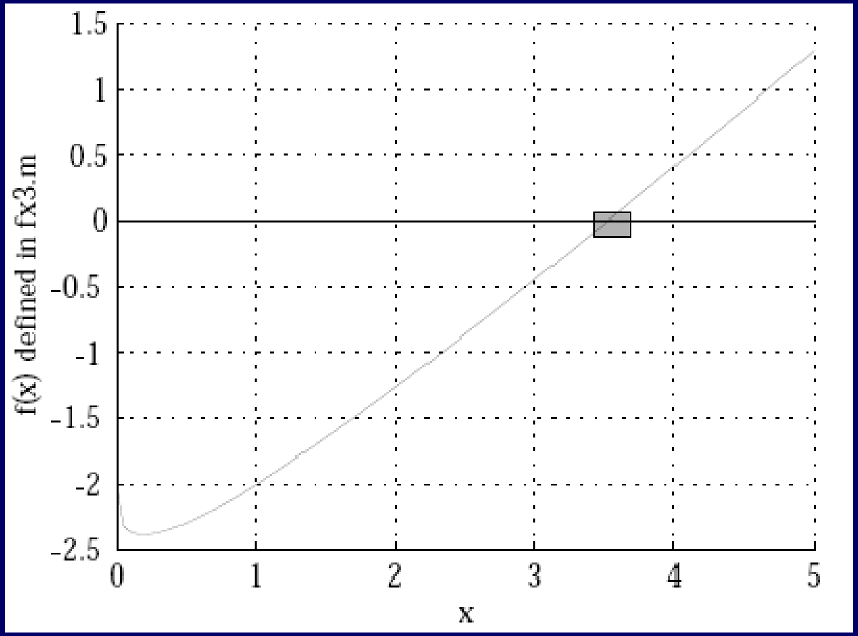


Notar el uso del operador array

En lugar de crear un m-file separado, podemos usar un objeto de función en línea

```
>> f = inline('x - x.^(1/3) - 2')
f =
Inline function:
f(x) = x - x.^(1/3) – 2
```

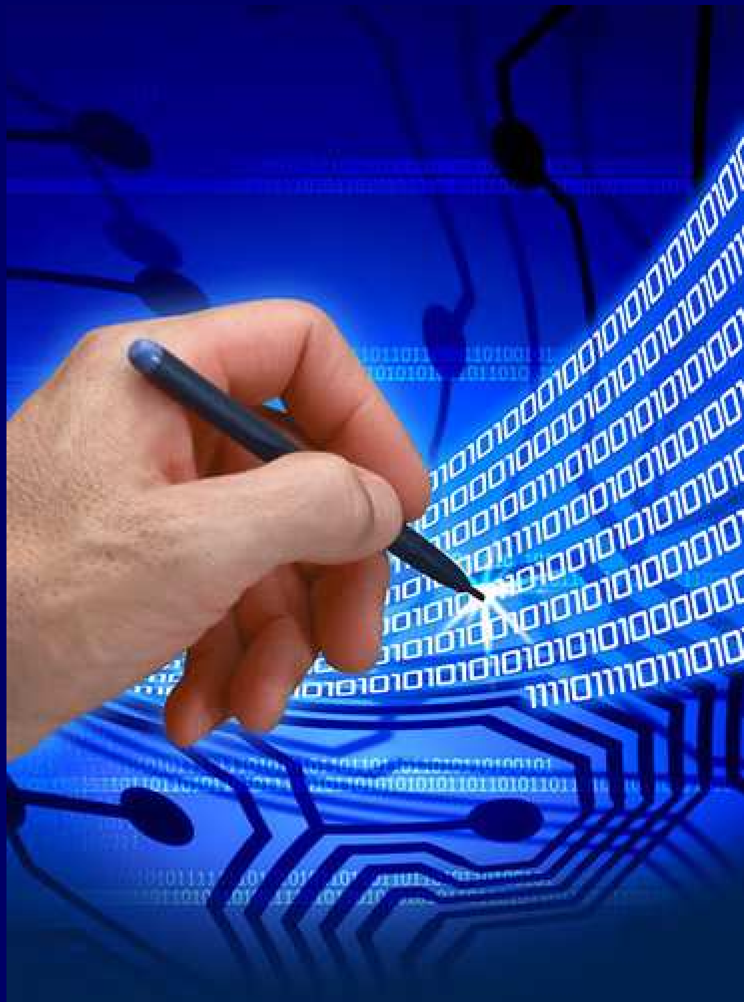
```
>> brackPlot(f,0,5)
ans =
3.4000 3.6000
```



Notar: **Cuando un objeto de función en línea es aplicado a brackPlot, el nombre del objeto no es colocado entre las comillas simples:**

brackPlot(f,0,5) en lugar de brackPlot('fun',0,5)

Algoritmos que refinan la estimación inicial



Algoritmos que refinan la estimación inicial

Ahora procederemos a desarrollar los siguientes algoritmos para encontrar raíces:

- **Interación de punto fijo**
- **Bisección**
- **Método de Newton**
- **Método de la Secante**

y otros más…

Estos algoritmos son aplicados después de que las estimaciones iniciales iniciales de la o las raíces son que son identificados como horquillados.

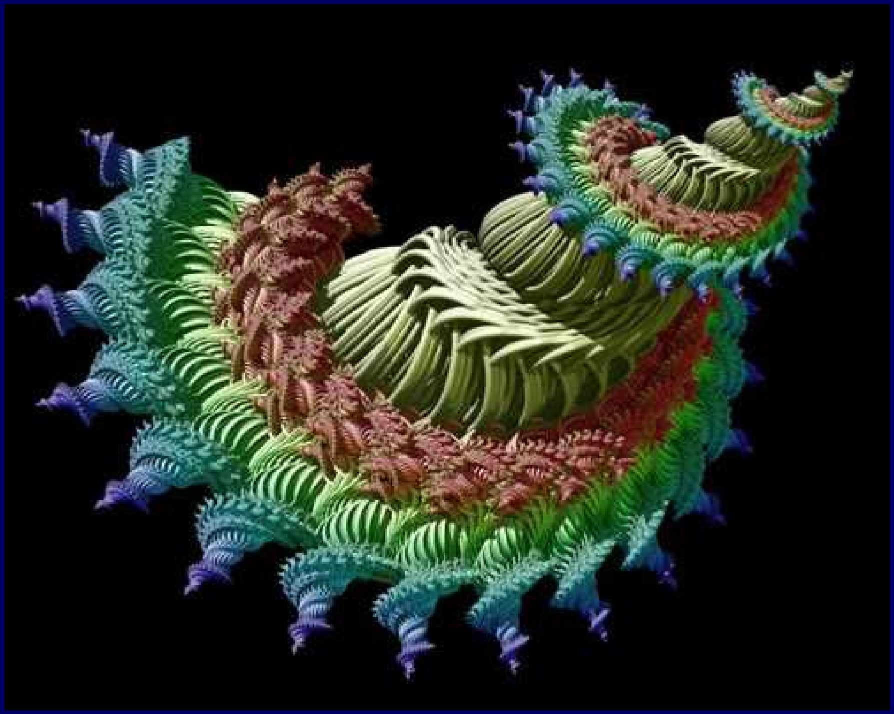
La clasificación de los Métodos o Algoritmos Numéricos para la aproximación de raíces de ecuaciones no lineales, son:

- Métodos Abiertos

-Métodos Cerrados

Métodos Abiertos

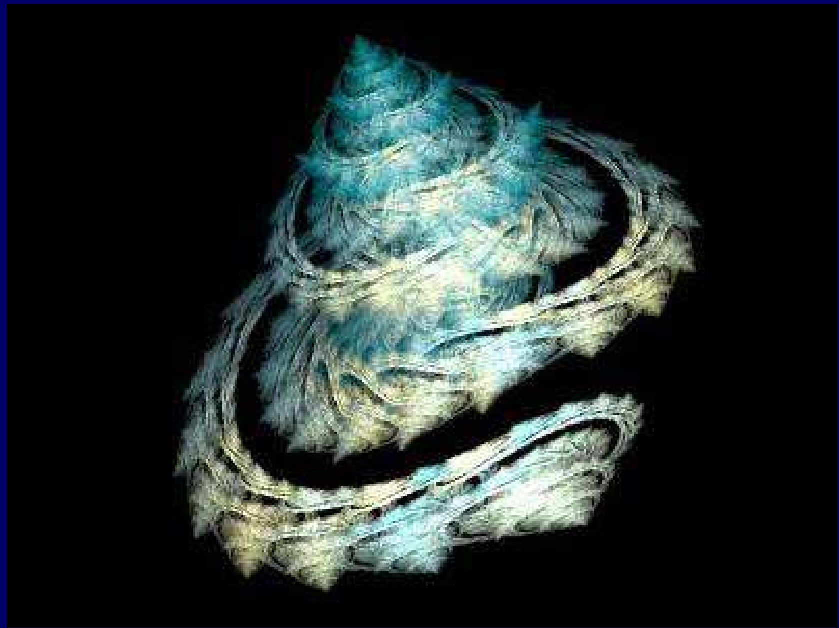
Estos métodos se basan en fórmulas que requieren únicamente de un solo valor de inicio o que empiecen con un par de ellos, pero no necesariamente encierran la raíz.



Estos métodos pueden diverger o alejarse de la raíz verdadera a mediada que se avanza, sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados.

Métodos Cerrados

Estos métodos aprovecha el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz, también llamados también métodos de intervalos, porque se necesita de dos valores iniciales para la raíz.



Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben "encerrar", o estar a ambos lados de la raíz. Muchos de estos métodos son muy robustos (es decir, tienen a aproximarse a la solución muy seguramente), pero son lentos.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN

SIGUIENTE TEMA:

Método de iteración de Punto fijo

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

mariochuqui@hotmail.com

http://www.mariochuqui.jimdo.com

UNSAAC