UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

SERIES DE FOURIER

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

5

ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES COMPLEJAS

Definición:

Diremos que un conjunto de funciones complejas $f(t)$ donde $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ es ortogonal en el intervalo $\langle a,b\rangle$, si:

$\int_a^b f_n(t)\cdot \overline{f_m}(t)\, dt = r_n \cdot \delta_{nm}$, donde: $\overline{f_m}(t)$ es el conjugado complejos de $f_m(t)$ y
δ_{nm} es el delta de Kronecker

Ejemplo:
$$f_m(t) = e^{i m \omega_0 t} = \cos(m\omega_0 t) + i\ \mathrm{sen}(m\omega_0 t)$$
$$\overline{f_m}(t) = e^{-i m \omega_0 t} = \cos(m\omega_0 t) - i\ \mathrm{sen}(m\omega_0 t)$$

Ejemplo:
Probar que el conjunto de funciones complejas $\left\{ e^{i n\omega_0 t} \right\}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ que son periódicas de periodo $T = 2p$, es un conjunto ortogonal en $\langle -p, p\rangle$

Solución:

i) $$\int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\, \overline{1}\, dt = \int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{i n \omega_0} e^{i n\omega_0 t}\Big|_{-p}^{p} = \frac{1}{i n\omega_0}\left[e^{i n\omega_0 p} - e^{-i n\omega_0 p}\right] = \frac{p}{i n \pi}\left[e^{i n\pi} - e^{-i n\pi}\right]$$
$$= \frac{p}{i n\pi}\left[(-1)-(-1)\right] = 0$$, donde: $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$ y $n \neq 0$.

ii) Si $n \neq m$
$$\int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\cdot \overline{e^{i m\omega_0 t}}\, dt = \int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\cdot e^{-i m\omega_0 t}\, dt = \int_{-p}^{p} e^{i\,\omega_0 (n-m)t}\, dt = \frac{1}{i\ \omega_0\,(n-m)} e^{i\,\omega_0 (n-m)t}\Big|_{-p}^{p}$$
$$= \frac{1}{i\ \omega_0\,(n-m)}\left[e^{i\,\omega_0 (n-m)p} - e^{-i\,\omega_0 (n-m)p}\right] = \frac{1}{i\ \omega_0\,(n-m)}\left[e^{i\,(n-m)\pi} - e^{-i\,(n-m)\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{i\ \omega_0\,(n-m)}\left[e^{i\,(n-m)\pi} - e^{-i\,(n-m)\pi}\right] = \frac{1}{i\ \omega_0\,(n-m)}\left[(-1)-(-1)\right] = 0,$$ donde:

iii) Si $n \neq m$
$$\int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\cdot \overline{e^{i n\omega_0 t}}\, dt = \int_{-p}^{p} e^{i n\omega_0 t}\cdot e^{-i n\omega_0 t}\, dt = \int_{-p}^{p} e^{i0}\, dt = \int_{-p}^{p} dt = t\Big|_{-p}^{p} = 2p = T\,.$$

SERIE DE FOURIER EN SU FORMA EXPONENCIAL

RECORDANDO:

$e^{ix} = \cos(x) + i\ sen(x)$ $\qquad \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$e^{-ix} = \cos(x) - i\ \text{sen}(x)$ $\qquad sen(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

También se tiene: $e^{2in\pi} = e^{-2in\pi} = 1$ y $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$

Además, se cumple: $\displaystyle\int_a^b e^{ikx}dt = \left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_a^b = -\frac{i}{k}e^{ikx}\Big|_a^b = -\frac{i}{k}\left[e^{ikb} - e^{ika}\right]$

LA IGUALDAD DE EULER

Si hacemos: $\boxed{\omega_0 = \dfrac{\pi}{p}}$

Como: $e^{in\omega_0 x} = \cos(n\,\omega_0 x) + i\ sen(n\,\omega_0 x)$, se tiene que es periódica, de periodo $T = 2p$,

Además: $\boxed{\cos(\,n\,\omega_0\,x) = \dfrac{e^{in\omega_0 x}+e^{-in\omega_0 x}}{2}}$ $\qquad \boxed{\text{sen}(\,n\,\omega_0\,x) = \dfrac{e^{in\omega_0 x}-e^{-in\omega_0 x}}{2i}}$

Sustituyendo en la Serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\,\omega_0 t) + b_n\ \text{sen}(n\,\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{in\omega_0 t}+e^{-in\omega_0 t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{in\omega_0 t}-e^{-in\omega_0 t}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)e^{in\omega_0 t} + \left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)e^{-in\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2}-\frac{i\,b_n}{2}\right)e^{in\omega_0 t} + \left(\frac{a_n}{2}+\frac{i\,b_n}{2}\right)e^{-in\omega_0 t}\right]$$

Llamando: $C_0 = \dfrac{a_0}{2}$; $\qquad C_n = \dfrac{a_n}{2} - \dfrac{i\,b_n}{2}$; $\qquad C_{-n} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{i\,b_n}{2}$

Reemplazando:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t} + C_{-n}\ e^{-in\omega_0 t}\right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{-n}\ e^{-in\omega_0 t}\right)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right) + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right) + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right)$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(C_n\ e^{in\omega_0 t}\right)}$$

**** A esta serie se le conoce como "Serie compleja de Fourier de f(t)" o "Serie exponencial de Fourier".***

Veamos ahora el coeficiente de Fourier en su forma exponencial:

$$C_n = \frac{a_n}{2} - \frac{i\,b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right) - i\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\ \text{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - i\ \text{sen}(n\omega_0 t)\right]dt$$

$\boxed{C_n = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\ e^{-in\omega_0 t}\ dt}$ Coeficiente de Fourier en su forma exponencial

NOTA:

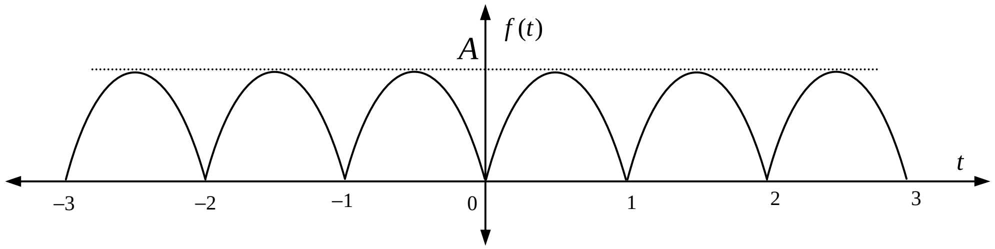
- Las series exponenciales y trigonométricas de Fourier no son dos tipos diferentes de series, sino dos formas distintas de expresar la misma serie. Se pueden obtener los coeficientes de una de las series a partir de la otra.
- Se puede escribir, pues $f(t)\,e^{-in\omega_0 t}$ es una función periódica de periodo $T = 2p$, por la propiedad: $\boxed{C_n = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+2p} f(t)\ e^{-in\omega_0 t}\ dt}$ donde $t_0 \in \mathbb{R}$
- $C_{-n} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + i\,b_n\right)$ de acuerdo a la formula tenemos: $C_{-n} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\ e^{in\omega_0 t}\ dt$
- Para convertir de serie "Exponencial" a serie "Trigonométrica"

$\boxed{\dfrac{a_o}{2} = C_0}$; $\boxed{a_n = C_n + C_{-n} = 2\,\text{Re}(C_n)}$; $\boxed{b_n = i(C_n - C_{-n}) = -2\ \text{Im}(C_n)}$

Donde: $C_n = \dfrac{1}{2}\left(a_n - i\,b_n\right)$, además tener en cuenta que se considera $b_0 = 0$

Ejemplo 01

Encontrar la serie de Fourier exponencial de la ***función seno rectificada***, como se muestra en la figura.



Solución:

La función $f(t) = A sen(\pi t)$ está definido en $0 < t < 1$, además la función es periódica de periodo

$T = 2p = 1 \;\Rightarrow\; p = \dfrac{1}{2}$ luego $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{p} \;\Rightarrow\; \omega_0 = 2\pi$

La serie de Fourier $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{i\,n\,\omega_0\,t} \;\Rightarrow\; \boxed{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{2i\,n\pi t}} \cdots (*)$

Los coeficientes C_n se calculan de la siguiente manera:

$C_n = \dfrac{1}{2p}\int_{t_0}^{t_0+2p} f(t)\, e^{-i\,n\omega_0\,t}\, dt$, haciendo $t_0 = 0$, $T = 2p = 1$

Luego, se tiene:

$$C_n = \frac{1}{1}\int_0^1 \mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\pi t)\, e^{-2i\,n\pi t}\, dt$$

$$= A\int_0^1 \left(\frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i}\right) e^{-2i\,n\pi t}\, dt \quad , \text{ por } \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{A}{2i}\int_0^1 \left(e^{-(2n-1)\,i\pi t} - e^{-(2n+1)\,i\pi t}\right) dt$$

$$= \frac{A}{2i}\left(\left.\frac{e^{-(2n-1)\,i\pi t}}{-(2n-1)\,i\,\pi}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{-(2n+1)\,i\pi t}}{-(2n+1)\,i\,\pi}\right|_0^1\right) \qquad \text{pues: } \int e^{Aix} dx = \frac{e^{Aix}}{Ai}$$

$$= \frac{A}{2i(-i\pi)}\left(\frac{1}{(2n-1)}\left[e^{-(2n-1)\,i\pi} - 1\right] - \frac{1}{(2n+1)}\left[e^{-(2n+1)\,i\pi} - 1\right]\right)$$

Como: $e^{2i\,n\pi} = e^{-2i\,n\pi} = 1$ y $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$

Se tiene: $e^{-(2n-1)\,i\pi} = e^{-2i\,n\pi}\, e^{i\pi} = -1$

$e^{-(2n+1)\,i\pi} = e^{-2i\pi n}\, e^{-i\,\pi} = -1$

$$C_n = \frac{A}{2\pi}\left(\frac{1}{(2n-1)}[-1-1] - \frac{1}{(2n+1)}[-1-1]\right) = \frac{A}{2\pi}\left(\frac{-2}{(2n-1)} - \frac{-2}{(2n+1)}\right) = -\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right)$$

$$= -\frac{A}{\pi}\left(\frac{2}{4n^2-1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_n = \frac{-2A}{\pi(4n^2-1)}}$$

Reemplazando en $(*)$ $\boxed{f(t) = -\dfrac{2A}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1} e^{2i\,n\pi t}}$ **La serie exponencial de Fourier.**

Por otro lado:

Si $n = 0 \;\Rightarrow\; C_0 = \dfrac{1}{1}\int_0^1 f(t)\, e^{-i(0)\omega_0 t}\, dt \;\Rightarrow\; C_0 = \int_0^1 A\, sen(\pi t)\, dt$

$$C_0 = -A\left.\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right|_0^1 = -\frac{A}{\pi}\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_0 = \frac{2A}{\pi}}$$

Ejemplo 02:

Expresar el resultado del ejemplo anterior utilizando la forma trigonométrica de la Serie de Fourier (Serie Trigonométrica de Fourier).

Solución:

$$f(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2i\,n\pi t}}{4n^2-1}$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{e^{i2\pi t}}{3}+\frac{e^{i4\pi t}}{15}+\frac{e^{i\,6\pi t}}{35}+\frac{e^{i8\pi t}}{65}+\cdots\right) - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{e^{-i\,2\pi t}}{3}+\frac{e^{-i\,4\pi t}}{15}+\frac{e^{-i\,6\pi t}}{35}+\frac{e^{-i\,8\pi t}}{65}+\cdots\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\left(\frac{\cos 2\pi t}{3}+\frac{\cos 4\pi t}{15}+\frac{\cos 6\pi t}{35}+\frac{\cos 8\pi t}{65}+\cdots\right)$$

Utilizando las ecuaciones que relacionan los coeficientes de ambas series:

Como: $C_n = \dfrac{-2A}{\pi(4n^2-1)}$ y $C_0 = \dfrac{2A}{\pi}$

Y sabemos que: $\boxed{\dfrac{a_o}{2} = C_0}$; $\boxed{a_n = C_n + C_{-n} = 2\,\mathrm{Re}(C_n)}$; $\boxed{b_n = i(C_n - C_{-n}) = -2\,\mathrm{Im}(C_n)}$

Entonces:

$$\frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(C_n) = 2\left(\frac{-2A}{\pi(4n^2-1)}\right) = \frac{-4A}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(C_n) = -2(0) = 0$$

Entonces:

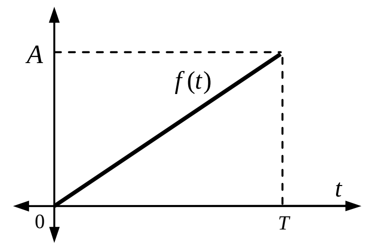
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\,\omega_0 t) + b_n\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4A}{\pi(4n^2-1)}\cos(n\,2\pi t)$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2\pi t + \frac{1}{15}\cos 4\pi t + \frac{1}{35}\cos 6\pi t + \frac{1}{65}\cos 8\pi t + \cdots\right)$$

Ejemplo 03:

Encuentre la serie exponencial de Fourier para la función diente de sierra definida por:

$$f(t) = \frac{A}{T}t \qquad 0 < t < T \quad , \quad f(t+T) = f(t)\,.$$



Solución:

La serie exponencial de Fourier es: $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n\, e^{i\,n\,\omega_0 t}$ **,** donde**:** $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Los coeficientes C_n se encuentran a partir de:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\,n\,\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\,n\,\omega_0\, t}\; dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{A}{T}t\right)e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\;dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\; e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\;dt$$

Sabiendo, tenemos: $\displaystyle\int_0^T tx\; e^{Bt}dt = \frac{1}{B^2}(B\,t-1)\,e^{Bt}\Big|_0^T$

Si tomamos $\boxed{B = -i\,n\,\omega_0}$

$$C_n = \frac{A}{T^2}\left[\frac{1}{(-i\,n\,\omega_0)^2}\;(-i\,n\,\omega_0\,t-1)\,e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\Big|_0^T\right]$$

$$= \frac{A}{T^2}\frac{1}{(-i\,n\,\omega_0)^2}\left[\;(-i\,n\,\omega_0\,T-1)e^{-i\,n\,\omega_0\,T} - (-i\,n\,\omega_0\,(0)-1)e^{-i\,n\,\omega_0\,(0)}\;\right]$$

$$= \frac{A}{T^2}\frac{1}{(-i\,n\,\omega_0)^2}\left[\;(-i\,n\,\omega_0\,T-1)e^{-i\,n\,\omega_0\,T}+1\right], \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{A}{T^2}\frac{1}{\left(-i\,n\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}\left[\;(-i\,n\frac{2\pi}{T}T-1)e^{-i\,n\frac{2\pi}{T}T}+1\right]$$

$$= \frac{A}{T^2}\frac{1}{\left(-i\,n\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}\left[\;(-i\,n\frac{2\pi}{T}T-1)e^{-i\,n\frac{2\pi}{T}T}+1\right],$$

$$= A\frac{1}{(-i\,n\,2\pi)^2}\left[\ (-i\,n\,2\pi-1)\,e^{-i\,n\,2\pi}+1\right] \qquad ,\ e^{-i\,n\,2\pi}=1$$

$$= A\frac{1}{(-i\,n\,2\pi)^2}(-i\,n\,2\pi) = A\frac{1}{-i\,n\,2\pi} = \frac{A}{n\,2\pi}i = \frac{A}{n\,2\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \text{, pues} \quad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_n = \frac{A}{2\pi n}e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

La serie exponencial de Fourier será:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A}{2\pi n}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)e^{i\,n\,\omega_0 t} = \frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\,n\,\omega_0 t} = \frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\,n\,\omega_0 t} \quad \text{, donde:} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \frac{A}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}e^{i\left(\frac{1}{2}+\frac{n\,t}{T}\right)\pi}},$$

Calculemos C_0

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}t\,dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{A}{T^2}\frac{1}{2}\,t^2\Big|_0^T = \frac{A}{2T^2}(T^2-0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_0 = \frac{A}{2}}$$

OBSERVACIÓN:

Otra forma de obtener el coeficiente de Fourier, es pensar que una función periódica $f(t)$ de periodo $T = 2p$ y es expresado como $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega_0 t}$

1. Utilizando la propiedad de Ortogonalidad de funciones complejas, podemos determinar los coeficientes de Fourier:

Solución:

A la función $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega_0 t}$ lo multiplicamos m. a m. por $e^{-i\,m\,\omega_0 t}$

$$f(t)\cdot e^{-i\,m\,\omega_0 t} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega_0 t}\right)e^{-i\,m\,\omega_0 t}$$

Integrando:

$$\int_{-p}^{p} f(t)\cdot e^{-i\,m\,\omega_0 t}\,dt = \int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \omega_0 t}\right)e^{-i\,m\,\omega_0 t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\int_{-p}^{p} e^{\,i\,\omega_0 (n-m)t}\,dt = c_n T$$

Espejando:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-p}^{p} f(t)\cdot e^{-i\,m\,\omega_0 t}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cdot e^{-i\,m\,\omega_0 t}\,dt}$$

2. Deducir lo coeficientes de serie de Fourier del tren periódico de impulsos unitarios

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{i\,n\,\omega_0\,t}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-p}^{p}\delta_T(t)\cdot e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-p}^{p}\delta(t)\cdot e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\,dt = \frac{1}{T}e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_n = \frac{1}{T}}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t} \qquad \Rightarrow \qquad \delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t}$$

3. Tenemos $\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t}$

$$\Rightarrow \quad \delta_T(t) = \frac{1}{T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t} + 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t}\right] = \frac{1}{T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\,n\,\omega_0\,t} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{i\,n\,\omega_0\,t} + e^{-i\,n\,\omega_0\,t}\right]\right) = \frac{1}{T}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{i\,n\,\omega_0\,t} + e^{-i\,n\,\omega_0\,t}}{2}\right]\right) = \frac{1}{T}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\,\omega_0\,t)\right)$$

Por lo tanto: $\boxed{\delta_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\,\omega_0\,t)}$

Introducción

Se sabe que la Serie de Fourier constituye un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas. Sin embargo, muchos problemas prácticos no involucran funciones periódicas, por lo tanto es necesario desarrollar un método de análisis de Fourier que incluyan funciones no periódicas. Luego estudiaremos la representación frecuencia de funciones no periódicas por medio de series de Fourier.

INTEGRAL DE FOURIER

Definición:

Consideremos una función f definida en continua por tramos, es absolutamente integrable en $(-\infty,\infty)$, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ (Existe)

Nota: Cuando es absolutamente integrable, se puede calcular el área.

Recordemos la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\cos(n\omega_0 x)\,dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\operatorname{sen}(n\omega_0 x)\,dx$$

Reemplazando, los coeficientes a_0, a_n y b_n, se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(n\omega_0 x)dx\right)\cos(n\omega_0 t) + \left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}(n\omega_0 x)dx\right)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 x) + \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(n\omega_0 x)\right]dx$$

$$= \frac{a_0}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(n\omega_0[t-x]\right)dx$$

$$\Rightarrow \qquad f(t) = \frac{a_0}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(n\omega_0[t-x]\right)dx$$

Hagamos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{p}[t-x]\right)dx$$

Llamando: $\boxed{\lambda_n = \dfrac{n\pi}{p}}$

También: $\boxed{\Delta\lambda_n = \dfrac{\pi}{p}}$ Pues: $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \left(\dfrac{(n+1)\pi}{p} - \dfrac{n\pi}{p}\right) = \dfrac{\pi}{p}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\lambda_n[t-x]\right)dx$$

Haciendo, además el siguiente cambio: $\boxed{F_p(\lambda_n) = \int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\lambda_n[t-x]\right)dx}$

$$f(t) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_p(\lambda_n)\,\Delta\lambda_n$$

Tomando límite, $p \to \infty$

$$f(t) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} F_p(\lambda_n)\,\Delta\lambda_n \quad \cdots(\Delta)$$

Como f es periódica definida en $(-\infty,\infty)$, además, f es absolutamente integrable

a) $\lim_{p\to\infty}\left[\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx\right] = \lim_{p\to\infty}\left(\dfrac{1}{2p}\right)\cdot\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = 0\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{un número}} = 0$

b) Llamamos: $F(\lambda_n) = \lim_{p\to\infty} F_p(\lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\left(\lambda_n[t-x]\right)dx$

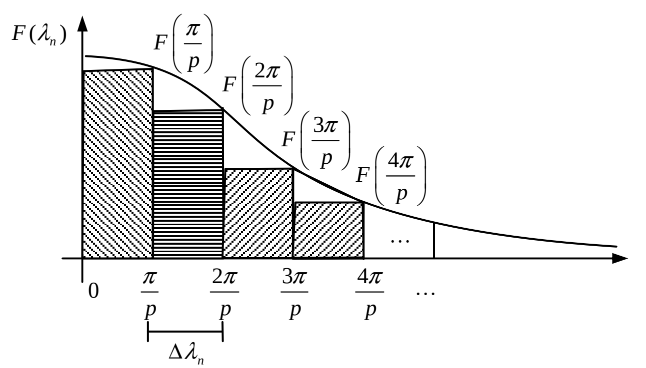
c) Si: $p \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_n \to 0$; pues: $\Delta\lambda_n = \dfrac{\pi}{p}$

Por lo tanto, en (Δ), tenemos:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} F_p(\lambda_n)\,\Delta\lambda_n = \frac{1}{\pi}\lim_{\Delta\lambda_n\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F_p(\lambda_n)\,\Delta\lambda_n$$

Por lo tanto, (Δ) escribimos: $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{\pi}\lim_{\Delta\lambda_n\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F(\lambda_n)\,\Delta\lambda_n} \quad \cdots(\Delta\Delta)$

Analizando la expresión, se tiene: $\Delta\lambda_n \to 0$, por lo tanto dicha sumatoria es una integral (área) desde 0 hacia el ∞



Es decir: $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(\lambda_n)\,d\lambda_n$ como ya no depende de n,

podemos escribir: $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(\lambda)\,d\lambda$

De ahí que la expresión anterior se escribe:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\left(\lambda[x-t]\right)dx\right]d\lambda}$$ **Llamado integral de Fourier**

OBSERVACIÓN:

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\left(\lambda[x-t]\right)dx\right]d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos(\lambda x)\cos(\lambda t)+\operatorname{sen}(\lambda x)\operatorname{sen}(\lambda t)]\,dx\right)d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos(\lambda x)\cos(\lambda t)]\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\operatorname{sen}(\lambda x)\operatorname{sen}(\lambda t)]\,dx\right)d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx\right]\cos(\lambda t)+\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx\right]\operatorname{sen}(\lambda t)\right)d\lambda
\end{aligned}$$

Llamando: $\boxed{A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx}$; $\boxed{B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx}$

Entonces:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\lambda)\cos(\lambda t)+B(\lambda)\operatorname{sen}(\lambda t)]\,d\lambda}$$

Llamado integral de Fourier en Senos y cosenos

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\lambda)\cos(\lambda t)+B(\lambda)\operatorname{sen}(\lambda t)]\,d\lambda$$

Donde: $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx$; $B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx$

NOTA:

1. Si f es una función par, entonces el producto $f(t)\cos t$ es una función par y $f(t)\operatorname{sen}(\omega_n t)$ es una función impar:

Luego: $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx=2\int_0^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx$

$B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx=0$

Luego la integral de para este caso es:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx\right)\cos(\lambda t)\,d\lambda$$

Llamado integral de Fourier de cosenos

2. Si f es una función impar, entonces el producto $f(t)\cos t$ es una función impar y $f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)$ es una función par:

Luego: $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,dx=0$

$B(\lambda)=2\int_0^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx$

Luego la integral de para este caso es:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx\right)\operatorname{sen}(\lambda t)\,d\lambda$$

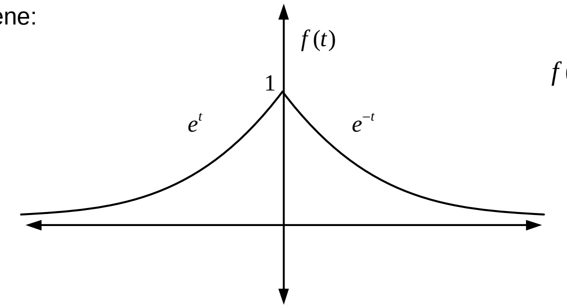
Llamado integral de Fourier de senos

Ejemplo 01:

Escribir la integral de Fourier de la función: $f(t) = e^{-|t|}$

Solución

Graficando se tiene:



$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , si\ t \ge 0 \\ e^{t} & , si\ t > 0 \end{cases}$$

La función es par $\Rightarrow$ $B(\lambda) = 0$

La integral de Fourier será: $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} A(\lambda)\cos(\lambda t)\, d\lambda$

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)\, dt \qquad \Rightarrow \qquad A(\lambda) = 2\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt}_{I}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt$$

$\Rightarrow$ Por el método por partes: $u = e^{-t}$ $\quad dv = \cos(\lambda t)\, dt$

$du = -e^{-t}dt \quad v = \dfrac{sen(\lambda t)}{\lambda}$

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt = e^{-t}\left.\frac{sen(\lambda t)}{\lambda}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{sen}(\lambda t)dt$$

$\Rightarrow$ Por el método por partes: $u = e^{-t}$ $\quad dv = \mathrm{sen}(\lambda t)\, dt$

$du = -e^{-t}dt \quad v = -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt = e^{-t}\left.\frac{\mathrm{sen}(\lambda t)}{\lambda}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\left[-e^{-t}\left.\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt\right]$$

$$= e^{-t}\left.\frac{\mathrm{sen}(\lambda t)}{\lambda}\right|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2}e^{-t}\cos(\lambda t)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt$$

Agrupando, se obtiene

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\, dt = \frac{1}{\lambda^2+1}}$$

Por lo tanto: $A(\lambda) = \dfrac{2}{\lambda^2+1}$

En consecuencia: $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{\lambda^2+1}\right)\cos(\lambda t)\, d\lambda$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda^2+1}\, d\lambda}$$ Integral de Fourier.

De lo anterior se puede deducir lo siguiente:

Como: $e^{-|t|} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda^2+1}\, d\lambda$

Si $\boxed{t=0}$ $\quad e^{-|0|} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda(0))}{\lambda^2+1}\, d\lambda \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2+1} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{\pi}{2}$

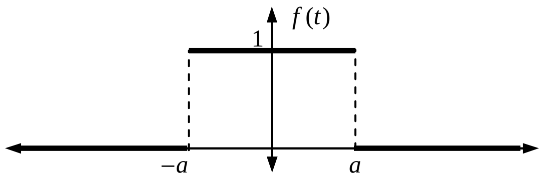
Si $\boxed{t=1}$ $\quad e^{-|1|} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda(1))}{\lambda^2+1}\, d\lambda \quad \Rightarrow \quad e^{-1} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda)}{\lambda^2+1}\, d\lambda \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda)}{\lambda^2+1}d\lambda = \frac{\pi}{2e}$

Ejemplo 02.

Escribir la Integral de Fourier de la función: $f(t) = u(t+a) - \mu(t-a)$, $a > 0$

Solución

Graficando se tiene:



$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,\text{si } |t| < a \\ 0 & ,\text{si } |t| > a \end{cases}$$

La función $f(t)$ es par $\Rightarrow$ $B(\lambda) = 0$.

La integral de Fourier será: $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\lambda)\cos(\lambda t)\, d\lambda$

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)\, dt$$

$$A(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)\, dt \;= 2\left[\int_0^{a}(1)\cos(\lambda t)\, dt + \int_a^{\infty}(0)\cos(\lambda t)\, dt\right] \;= 2\int_0^{a}\cos(\lambda t)\, dt$$

$$= 2\left.\frac{sen(\lambda t)}{\lambda}\right|_0^a \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A(\lambda) = 2\frac{\text{sen}(\lambda a)}{\lambda}}$$

Luego:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(2\frac{\text{sen}(\lambda a)}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)\, d\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}(\lambda a)\cos(\lambda t)}{\lambda}\, d\lambda}$$

Como: $f(t) = u(t+a) - \mu(t-a)$

Si $\boxed{t = 0}$ $\quad u(0+a) - \mu(0-a) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}(\lambda a)\cos(\lambda(0))}{\lambda}\, d\lambda \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}(\lambda a)}{\lambda}\, d\lambda$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{\infty}\frac{\text{sen}(\lambda a)}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}}$$

INTEGRAL DE FOURIER EN SU FORMA EXPONENCIAL

Dada una función f definida en $(-\infty, \infty)$ con la propiedad de ser absolutamente integrable, Entonces la integral de Fourier es:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda(x-t))\, dx\right] d\lambda$$

En la integral de Fourier, el integrando $f(x)\cos(\lambda(x-t))$ con respecto de λ es función par y luego existe la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda(x-t)\, dx$, pero el integrando $f(x)\,\text{sen}(\lambda(x-t))$ es una función con respecto a λ, por consiguiente: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(\lambda(x-t)\, dx = 0$, luego la integral

Entonces, $\quad -i\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(\lambda(x-t)\, dx\right] d\lambda = 0$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda(x-t)\, dx\right] d\lambda - i\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(\lambda(x-t)\, dx\right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\;\cos(\lambda(x-t) - i\,\text{sen}(\lambda(x-t)\;]\, dx\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda(x-t)}\, dx\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, e^{i\lambda t}\, dx\right) d\lambda$$

Por lo tanto: $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right) e^{i\lambda t}\, d\lambda}$

También se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right) e^{i\lambda t}\, d\lambda}$$

Las dos expresiones anteriores son llamados integral de Fourier en forma exponencial.

TRANSFORMADA DE FOURIER

Definición:

Si la función $f(t)$ es una función definida en $(-\infty,\infty)$ con $f(t)$ absolutamente integrable, se tiene que la integral de Fourier en su forma exponencial

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right)e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

A la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$, se llama la ***Transformada de Fourier de la función*** $f(t)$ que es denotada por $F(\lambda)$

Es decir: $$\boxed{F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx}$$

Además a la expresión:

$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda}$, se le llama ***Formula de inversión para la transformada*** $F(\lambda)$.

NOTACION:

Denotaremos la transformada de Fourier ó Transformada de Fourier de $f(t)$, con: $\mathscr{F}\{f(t)\}$

Es decir:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx$$

La expresión $\mathscr{F}^{-1}\{F(\lambda)\}$ se utiliza para indicar la transformada Inversa de Fourier de $F(\lambda)$

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\lambda)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

A ambas expresiones se conocen como par de transformada de Fourier.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SENOS Y COSENOS

Dada función $f(t)$ es una función definida en $(-\infty,\infty)$ con $f(t)$ absolutamente integrable, se tiene que la integral de Fourier, en la llamada ***integral de Fourier en Senos y cosenos***

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\lambda)\cos(\lambda t)+B(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda t)\right]d\lambda$$

Donde: $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,d\lambda$; $B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx$

1. Si f es una función par

Se tiene: $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx$ (existe)

y $B(\lambda)=0$

A la siguiente integral se le ha llamado **integral de Fourier de cosenos:** $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\lambda)\cos(\lambda t)\,d\lambda$

La integral dado por $A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx$, se le llama ***transformada de Fourier de Cosenos*** y es denotado por $F_C(\lambda)$. Es decir:

$$\boxed{F_C(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx}$$

Luego la formula de inversión de la transformada de Fourier de f es:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_C(\lambda)\cos(\lambda t)\,d\lambda} \quad \text{ó} \quad \boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_C(\lambda)\cos(\lambda t)\,d\lambda}$$

2. Si f es una función impar

Se tiene: $A(\lambda)=0$

y $B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx$ (existe)

A la siguiente integral se le llama **integral de Fourier de senos:** $f(t)=\int_{0}^{\infty} B(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda t)\,d\lambda$

La integral dado por $B(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx$, se le llama ***transformada de Fourier de senos*** y es denotado por $F_S(\lambda)$. Es decir:

$$\boxed{F_S(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx}$$

Luego la formula de inversión de la transformada de Fourier de f es:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_S(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda t)\,d\lambda} \quad \text{ó} \quad \boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_S(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda t)\,d\lambda}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE I

Sean las transformadas de Fourier $\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\lambda)$, $\mathscr{F}\{g(t)\}=G(\lambda)$, además α,β son constantes arbitrarias y λ_0 es una constante real

1. $\mathscr{F}\{\,\alpha f(t)+\beta g(t)\,\}=\alpha\mathscr{F}\{f(t)\}+\beta\mathscr{F}\{g(t)\}$
2. $\mathscr{F}\{f(at)\}=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)$
3. $\mathscr{F}\{f(-t)\}=F(-\lambda)$
4. $\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=F(\lambda)e^{-i\lambda t_0}$
5. $\mathscr{F}\{\,f(t)\cdot e^{i\lambda_0 t}\,\}=F(\lambda-\lambda_0)$
6. $\mathscr{F}\{\,F(t)\,\}=2\pi\cdot f(-\lambda)$

Demostración:

1. Esta primera propiedad se base en la linealidad de la integral.

$$\mathscr{F}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]\cdot e^{-i\lambda t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha f(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}\beta g(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt+\beta\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt=\alpha\mathscr{F}\{f(t)\}+\beta\mathscr{F}\{g(t)\}$$

2. $\mathscr{F}\{f(at)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt$

Haciendo el cambio de variable: $\boxed{at=u}$, $\quad t=\dfrac{u}{a}\;\Rightarrow\;dt=\dfrac{du}{a}$

Respecto de los límites de integración, donde se tiene diferentes casos:

a) Si $a>0$ y $t\to+\infty\;\Rightarrow\;at\to+\infty\;\Rightarrow\;u\to+\infty$,
$t\to-\infty\;\Rightarrow\;at\to-\infty\;\Rightarrow\;u\to-\infty$,

$$\mathscr{F}\{f(at)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\lambda\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\frac{\lambda}{a}u}\,dt=\frac{1}{a}F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

b) Si $a<0$ y $t\to+\infty\;\Rightarrow\;at\to-\infty\;\Rightarrow\;u\to-\infty$,
$t\to-\infty\;\Rightarrow\;at\to+\infty\;\Rightarrow\;u\to+\infty$,

$$\mathscr{F}\{f(at)\}=\int_{+\infty}^{-\infty}f(u)\cdot e^{-i\lambda\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a}=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\frac{\lambda}{a}u}\,dt=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

De los casos anteriores, se tiene:

$$\mathscr{F}\{f(at)\}=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

3. Tomando $\boxed{a=-1}$ en la propiedad anterior, se tiene:

$$\mathscr{F}\{f(-t)\}=\frac{1}{|-1|}F\left(\frac{\lambda}{(-1)}\right)=F(-\lambda)\qquad\Rightarrow\qquad\mathscr{F}\{f(-t)\}=F(-\lambda)$$

4. En $\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-t_0)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt$

Hacemos el cambio de variable $\boxed{t-t_0=u}$ $\;\Rightarrow\; t=u+t_0$, con $dt=du$

Respecto de los límites: $t\to+\infty\;\Rightarrow\;u\to+\infty$,
$t\to-\infty\;\Rightarrow\;u\to-\infty$,

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\lambda(u+t_0)}\,du=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\lambda u}\cdot e^{-i\lambda t_0}\,du=e^{-i\lambda t_0}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot e^{-i\lambda u}\,du$$

Tomando extremos: $\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=F(\lambda)e^{-i\lambda t_0}$

5. De la definición:

$$\mathscr{F}\{\,f(t)\cdot e^{i\lambda_0 t}\,\}=\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)\cdot e^{i\lambda_0 t}]\cdot e^{-i\lambda t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i(\lambda-\lambda_0)t}\,dt=F(\lambda-\lambda_0)$$

$$\Rightarrow\qquad\mathscr{F}\{\,f(t)\cdot e^{i\lambda_0 t}\,\}=F(\lambda-\lambda_0)$$

6. Por la formula de inversión para la transformada $F(\lambda)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

Reemplazando t por $-\lambda$, y además, λ por t se tiene:

$$f(-\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\,e^{it(-\lambda)}\,dt\qquad\Rightarrow\qquad 2\pi\cdot f(-\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\mathscr{F}\{\,F(t)\,\}$$

$$\Rightarrow\qquad\mathscr{F}\{\,F(t)\,\}=2\pi\cdot f(-\lambda)$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE II

Sean las transformadas de Fourier $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\lambda)$,

1. Si: $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, entonces:

$$\mathscr{F}\{\ f'(t)\} = i\,\lambda\, F(\lambda) = i\,\lambda\,\mathscr{F}\{f(t)\}$$

2. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0) = 0 \Rightarrow \quad \mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right\} = \dfrac{1}{i\,\lambda} F(\lambda) = \dfrac{1}{i\,\lambda}\mathscr{F}\{f(t)\}$

3. $\mathscr{F}\{-t\,i\,f(t)\} = \dfrac{d\,F(\lambda)}{d\,\lambda}$

Demostración:

1. $\mathscr{F}\{\ f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\lambda t}\,d\,t$

Por el método por partes: $u = e^{-i\lambda t}$ $\qquad dv = f'(t)\,d\,t$

$du = -i\,\lambda\, e^{-i\lambda t}\,d\,t \qquad v = f(t)$

$$\mathscr{F}\{\ f'(t)\} = e^{-i\lambda t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\,\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,d\,t$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0 \quad\Rightarrow\quad e^{-i\lambda t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\mathscr{F}\{\ f'(t)\} = i\,\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,d\,t = i\,\lambda\, F(\lambda) = i\,\lambda\,\mathscr{F}\{\ f(t)\}$$

OBSERVACIÓN:

$$\mathscr{F}\{\ f^{(n)}(t)\} = (i\,\lambda)^n\ F(\lambda) = (i\,\lambda)^n\ \mathscr{F}\{\ f(t)\}$$

2. Sea $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt \qquad \phi'(t) = f(t)$, Además: $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(0) = 0$

Por otro lado, por lo anterior:

$\mathscr{F}\{\ f(t)\} = \mathscr{F}\{\ \phi'(t)\} = i\,\lambda\,\phi(\lambda) \qquad\Rightarrow\qquad \phi(\lambda) = \dfrac{1}{i\,\lambda}\mathscr{F}\{\ f(t)\}$, si $\lambda \neq 0$.

Si $\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda)\ dt$

Cuando:

$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \neq 0$, se tiene que: $\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt\right\} = \dfrac{1}{i\,\lambda} F(\lambda) + \pi\, F(0)\,\delta(\lambda)$

3. $F(\lambda) = \mathscr{F}\{\ f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt$

Derivando:

$$\frac{d\,F(\lambda)}{d\,\lambda} = \frac{d}{d\,\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(-i\,\lambda)\, e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\lambda\, f(t)\ \ e^{-i\lambda t} dt = \mathscr{F}\{\ -i\,\lambda\, f(t)\}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathscr{F}\{\ -i\,\lambda\, f(t)\} = \frac{d\,F(\lambda)}{d\,\lambda}$$

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (21 de marzo de 1768 en Auxerre - 16 de mayo de 1830 en París), matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el cual consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor. Fue el primero en dar una explicación científica al efecto invernadero en un tratado. Se le dedicó un asteroide que lleva su nombre y que fue descubierto en 1992.

.

CONVOLUCIÓN

Consideremos las funciones $f(t)$ y $g(t)$, entonces "La convolución de $f(t)$ y $g(t)$", está definida por la expresión:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(t-x)\,dx$$

OBSERVACIÓN:

Un caso especial importante es cuando $f(t)=0$, para $t<0$ y $g(t)=0$ para $t<0$, entonces

$$f(t)*g(t)=\int_{0}^{t} f(x)\cdot g(t-x)\,dx$$

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN

1. **CONMUTATIVA** $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$
2. $f(t)*(\alpha g(t))=\alpha(g(t)*f(t))$
3. **ASOCIATIVA.** $[f(t)*g(t)]*h(t)=f(t)*[g(t)*h(t)]$
4. La convolución de una función $f(t)$ con la función impulso unitario $\delta(t)$, da la misma función.
   $f(t)*\delta(t)=f(t)$, donde $\delta(t)$ es la función impulso unitario,
5. Demostrar que $f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$
   $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

Demostración:

1. Aplicando la definición de convolución, se tiene: $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(t-x)\,dx$

Haciendo el cambio de variable: $t-x=u$, $dx=-du$, además: $x\to-\infty \Rightarrow u\to+\infty$
Luego: $x\to+\infty \Rightarrow u\to-\infty$

$$f(t)*g(t)=\int_{+\infty}^{-\infty} f(t-u)\cdot g(u)\,(-du)=-\int_{+\infty}^{-\infty} f(t-u)\cdot g(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\cdot f(t-u)\,du=g(t)*f(t)$$

$$\Rightarrow \qquad f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

2. $f(t)*\alpha g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\alpha g(t-x)\,dx=\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(t-x)\,dx=\alpha(f(t)*g(t))$

3. Sea: $f(u)*g(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(u-x)\,dx$

Entonces:

$$[f(t)*g(t)]*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[f(u)*g(u)]\cdot h(t-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(u-x)\,dx\right]\cdot h(t-u)\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u-x)\cdot h(t-u)\,du\right]dx$$

Haciendo el cambio de variable: $z=u-x \Rightarrow u=x+z$, $dz=du$

Además: $u\to+\infty \Rightarrow z\to+\infty$
$u\to-\infty \Rightarrow z\to-\infty$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\cdot h(t-x-z)\,dz\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot[g(t-x)*h(t-x)]\,dx$$ pues: $g(t-x)*h(t-x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\cdot h(t-x-z)\,dz$

$$=f(t)*[g(t)*h(t)]$$

4. Sea: $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)$ por la conmutatividad de la convolución

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\cdot f(t-x)\,dx$ de la definición de la convolución.

$=f(t)$ por propiedad de función impulso unitario

$\Rightarrow \quad f(t)*\delta(t)=f(t)$

5. La demostración es análoga a la anterior

$f(t)*\delta(t-T)=\delta(t-T)*f(t)$ por la conmutatividad de la convolución

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-T)\cdot f(t-x)\,dx$ de la definición de la convolución.

$=f(t-T)$ por propiedad de función impulso unitario

$\Rightarrow \quad f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$

Análogamente se prueba:

$$f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$$

TEOREMAS

Sean la transformadas $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\lambda)$, $\mathscr{F}\{g(t)\} = G(\lambda)$ y

$\mathscr{F}^{-1}\{F(\lambda)\} = f(t)$, $\mathscr{F}^{-1}\{G(\lambda)\} = g(t)$

Entonces:

1. **CONVOLUCIÓN EN EL TIEMPO**

$$\mathscr{F}\{f(t)*g(t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\}\cdot\mathscr{F}\{g(t)\} \quad \text{ó} \quad \mathscr{F}\{f(t)*g(t)\} = F(\lambda)\cdot G(\lambda)$$

2. **CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA**

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\lambda)*G(\lambda)\} = 2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$$

$$\mathscr{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[F(\lambda)*G(\lambda)\right]$$

3. **(LEMA I)**

$$\mathscr{F}\{\overline{f(t)}\} = \overline{F(-\lambda)}$$

4. **(LEMA II)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\cdot G(-\lambda)\,d\lambda$$

5. **PARSEVAL Y ESPECTRO DE ENERGÍA**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\lambda$$

Demostración:

1. $$\mathscr{F}\{f(t)*g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)*g(t)\right]e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(t-x)\,dx\right]e^{-i\lambda t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\mathscr{F}\{g(t-x)\}\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[G(\lambda)\cdot e^{-i\lambda x}\right]dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx\right]\cdot G(\lambda)$$

$$= F(\lambda)\cdot G(\lambda) = \mathscr{F}\{f(t)\}\cdot\mathscr{F}\{g(t)\}$$

2. $$\mathscr{F}^{-1}\{F(\lambda)*G(\lambda)\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cdot G(\lambda-x)\,dx\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cdot G(\lambda-x)\,dx\right]e^{i\lambda t}d\lambda$$

Haciendo el cambio de variable: $\boxed{\lambda - x = z}$, $\lambda = x+z$, $d\lambda = dz$

Además: $\lambda\to+\infty \Rightarrow z\to+\infty$

$\lambda\to-\infty \Rightarrow z\to-\infty$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cdot G(z)\,dx\right]e^{i(x+z)t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(z)\cdot e^{i(x+z)t}\,dz\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(z)\cdot e^{izt}\,dz\right]dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(z)\cdot e^{izt}\,dz\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}\,dx\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(z)\cdot e^{izt}dz\right] = 2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$$

3. De la definición de transformada de Fourier y propiedades de números complejos, tenemos:

$$\mathscr{F}\{\overline{f(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}\,e^{-i\lambda t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}\cdot\overline{e^{i\lambda t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)\cdot e^{i\lambda t}}\,dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i(-\lambda)t}\,dt} = \overline{F(-\lambda)}$$

4. Por el teorema de convolución de la frecuencia anterior, se tiene:

$$\mathscr{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[F(\lambda)*G(\lambda)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cdot G(\lambda-x)\,dx$$

Además, por la transformada de Fourier se tiene: $\mathscr{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt$

Igualando ambos: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\cdot e^{-i\lambda t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cdot G(\lambda-x)\,dx$$

Si tomamos: $\boxed{\lambda = 0}$ $$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\cdot e^{0}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cdot G(0-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\cdot G(-x)\,dx$$

Cambiando de variable $\boxed{x = \lambda}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\cdot G(-\lambda)\,d\lambda$$

5. Se tiene: $$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\cdot\overline{F(-[-\lambda])}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\cdot\overline{F(\lambda)}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda$$

NOTA:

Si se define el contenido de energía, E de una señal $f(t)$ como la primera integral en la ecuación anterior, entonces, si $f(t)$ representa el voltaje de una fuente conectada a través de una resistencia de 1Ω , entonces la cantidad E es igual a la energía total entregada por la fuente. Por el teorema de Parseval, $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\,d\lambda$ y a la función $|F(\lambda)|^2$ se le llama ***espectro de energía ó función de densidad de energía espectral*** de $f(t)$.

CALCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

LA FUNCÍÓN IMPULSO UNITARIO

Calculando la transformada de Fourier de la función impulso unitario $\delta(t)$

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda t}\Big|_{t=0} = e^{0} = 1$$

$$\boxed{\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1}$$

PROPOSICION:

1. $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, d\lambda$
2. $\delta(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos(\lambda t)\, d\lambda$
3. $\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-i\lambda t_0}$

Demostración:

1. Del el cálculo de la transformada de Fourier de la función impulso unitario $\delta(t)$ y de la definición de transformada inversa, se tiene:

$$\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{i\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\lambda$$

2. $$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\lambda t) + i\,\mathrm{sen}(\lambda t)]\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(\lambda t)}_{par}\, d\lambda + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{sen}(\lambda t)}_{impar}\, d\lambda$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\lambda t)\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\lambda t)\, d\lambda$$

3. $$\mathscr{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda t}\Big|_{t=t_0} = e^{-i\lambda t_0}$$

LA FUNCION CONSTANTE

$$\mathscr{F}\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-i\lambda t} dt = 2\pi A\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-\lambda)t} dt\right) = 2\pi A\,\delta(-\lambda) = 2\pi A\,\delta(\lambda)$$ ($\delta(t)$ es una función par)

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathscr{F}\{A\} = 2\pi A\,\delta(\lambda)}$$

NOTA: $\boxed{\mathscr{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\lambda)}$

PROPOSICIÓN

$$\boxed{\mathscr{F}\{e^{i\lambda_0 t}\} = 2\pi\,\delta(\lambda-\lambda_0)}$$

Demostración:

Se sabe que si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}\{f(t)e^{i\lambda_0 t}\} = F(\lambda-\lambda_0)$

Por lo tanto:

Como $\mathscr{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}\{e^{i\lambda_0 t}\} = \mathscr{F}\{1\cdot e^{i\lambda_0 t}\} = 2\pi\,\delta(\lambda-\lambda_0)$

ESCALON UNITARIO

$$\boxed{\mathscr{F}\{\mu(t)\} = \pi\,\delta(\lambda) - i\frac{1}{\lambda}}$$

Demostración:

Recordando: $\mu(t) = \begin{cases} 1 & ,\text{si } t>0 \\ 0 & ,\text{si } t<0 \end{cases}$, $\mu(-t) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } t>0 \\ 1 & ,\text{si } t<0 \end{cases}$

Por lo tanto: $1 = \mu(t) + \mu(-t)$ (excepto en $t=0$)

Además: $\mathscr{F}\{1\} = \mathscr{F}\{\mu(t)+\mu(-t)\} = \mathscr{F}\{\mu(t)\} + \mathscr{F}\{\mu(-t)\} = 2\pi\,\delta(\lambda)$

$$\boxed{\mathscr{F}\{\mu(t)\} + \mathscr{F}\{\mu(-t)\} = 2\pi\,\delta(\lambda)} \quad \cdots(I)$$

Si suponemos que:

$\boxed{\mathscr{F}\{\mu(t)\} = k\,\delta(\lambda) + B(\lambda)}$, donde: $B(\lambda)$ es una función cualquiera, y k es una constante.

Por la propiedad:

Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}\{f(-t)\} = F(-\lambda)$

Entonces:

$\mathscr{F}\{\mu(-t)\} = k\,\delta(-\lambda) + B(-\lambda) = k\,\delta(\lambda) + B(-\lambda)$ pues, δ es una función par ($\delta(-t) = \delta(t)$)

$$\boxed{\mathscr{F}\{\mu(-t)\} = k\,\delta(\lambda) + B(-\lambda)}$$

Reemplazando en (I), tenemos:

$$k\,\delta(\lambda) + B(\lambda) + k\,\delta(\lambda) + B(-\lambda) = 2\pi\,\delta(\lambda) \quad \Rightarrow \quad 2k\,\delta(\lambda) + B(\lambda) + B(-\lambda) = 2\pi\,\delta(\lambda) + 0$$

De allí que igualando, tenemos:

$\boxed{k=\pi}$, además $B(\lambda)+B(-\lambda)=0 \quad \Rightarrow B(-\lambda)=-B(\lambda)$ es decir $B(\lambda)$ es una función impar.

Entonces: $\boxed{\mathscr{F}\{\mu(t)\}=\pi\,\delta(\lambda)+B(\lambda)} \quad \cdots(II)$

Hallemos como es $B(\lambda)$

$$\begin{aligned}
1 &= \mathscr{F}\{\delta(t)\} \\
&= \mathscr{F}\{\mu'(t)\} && \text{, pues: } \mu'(t)=\frac{d}{dt}\mu(t)=\delta(t) \\
&= i\lambda\,\mathscr{F}\{\mu(t)\} && \text{, por propiedad de la transformada de Fourier} \\
&= i\lambda\left[\pi\,\delta(\lambda)+B(\lambda)\right] && \text{, por } (II) \\
&= i\,\pi\,\lambda\,\delta(\lambda)+i\,\lambda\,B(\lambda) \\
&= i\,\lambda\,B(\lambda) && \text{, pues } \lambda\,\delta(\lambda)=0
\end{aligned}$$

Tomando extremos es tiene: $\boxed{B(\lambda)=\dfrac{1}{i\,\lambda}}$

Reemplazando en (II), obtenemos: $\mathscr{F}\{\mu(t)\}=\pi\,\delta(\lambda)+\dfrac{1}{i\,\lambda}$

Como $(i)^2=-1$, se consigue:

$$\boxed{\mathscr{F}\{\mu(t)\}=\pi\,\delta(\lambda)-i\frac{1}{\lambda}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA