UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

SERIES DE FOURIER

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

3

SIMETRIAS Y COEFICIENTES DE FOURIER

Mediante las propiedades de simetría se simplifica el cálculo de los coeficientes de Fourier.

TEOREMA:

La serie de Fourier de la función periódica de periodo $T = 2p$.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \right)$$

a) Si $f(t)$ es una **función par** y periódica con periodo $T = 2p$, se cumple.

$\boxed{b_n = 0}$, $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos n\,\omega_0\, t) \quad \text{y} \quad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(n\,\omega_0\, t)\, dt$$

b) Si $f(t)$ es una **función impar** y periódica con periodo $T = 2p$, se cumple.

$\boxed{a_0 = 0}$, $\boxed{a_n = 0}$, $$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\,\omega_0\, t) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\, t)\, dt$$

c) Si $f(t)$ es una **función** periódica con periodo $T = 2p$ que tiene **simetría de media onda**, contiene armónicas impares solamente.
Es decir:

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{p}\left(\displaystyle\int_0^p f(t)\cos(n\,\omega_0\, t)\, dt\right) & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \text{ si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{p}\left(\displaystyle\int_0^p f(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\, t)\, dt\right) & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

d) Si $f(t)$ es una **función** periódica con periodo $T = 2p$ que tiene simetría de cuarto de onda par, consta de armónicos impares de términos cosenos solamente.
Es decir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos((2n-1)\omega_0 t) \quad \text{y} \quad a_{2n-1} = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\, t)\, dt$$

e) Si $f(t)$ es una **función** periódica con periodo $T = 2p$ que tiene simetría de cuarto de onda impar, consta de armónicos impares de términos senos solamente.
Es decir:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\omega_0 t) \quad \text{y} \quad b_{2n-1} = \frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\operatorname{sen}((2n-1)\,\omega_0\, t)\, dt$$

Demostración

a) Como $f(t)$ es par y $\text{sen}\,(n\omega_0 t)$ es impar, $\Rightarrow$ $f(t)\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)$ es impar,

por lo tanto: $\quad b_n = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \boxed{b_n = 0}$

Luego, la serie de Fourier se reduce a: $\boxed{f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t)\right)}$

Como $f(t)$ es par y $\cos(n\omega_0 t)$ es par, $\Rightarrow$ $f(t)\cos(n\omega_0 t)$ es par, por lo tanto:

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

Luego: $\boxed{a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(t)\cos n\omega_0 t\,dt}$

b) Como $f(t)$ es impar $\Rightarrow$ $a_0 = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_0 = 0}$

Como $f(t)$ es impar y $\cos(n\omega_0 t)$ es par, $\Rightarrow$ $f(t)\cos(n\omega_0 t)$ es impar,

por lo tanto: $a_n = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_n = 0}$

Luego, la serie de Fourier se reduce a: $\boxed{f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)\right)}$

Como $f(t)$ es impar y $\text{sen}\,(n\omega_0 t)$ es impar, $\Rightarrow$ $f(t)\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)$ es par, por lo tanto:

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\,(n\omega_0 t)\,dt$$

Luego: $\boxed{b_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt}$

c) Como:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{p}\left(\int_{-p}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^p f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right) \quad \cdots\cdots(I)$$

Analicemos la 1ra integral: $\displaystyle\int_{-p}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \int_{-p}^{0} f(u)\cos(n\omega_0 u)\,du$

Cambiando de variable $\quad u = t - \dfrac{T}{2} = t - p \quad \Rightarrow \quad t = u + p \quad , \quad du = dt$

Además $\quad (u = -p \;\Rightarrow\; t = 0) \quad$ y $\quad (u = 0 \;\Rightarrow\; t = p)$

Entonces, se sabe que $f(t-p) = f(t - \frac{T}{2}) = -f(t)$ ***(por ser*** $f(t)$ ***se de media onda)***

$$\int_{-p}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \int_0^p f(t-p)\cos(n\omega_0(t-p))\,dt$$

$$= \int_0^p f(t-p)\left[\cos(n\omega_0 t)\cdot\cos(n\pi) + \text{sen}(n\omega_0 t)\cdot\underbrace{\text{sen}(n\pi)}_{=0}\right]dt$$

$$= -\int_0^p f(t)\cos(n\omega_0 t)\cdot\cos(n\pi)\,dt \qquad \text{como} \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Luego: $\displaystyle\int_{-p}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \int_0^p (-1)^{n+1}\,f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$

Reemplazando en (I) $\quad a_n = \dfrac{1}{p}\left(\displaystyle\int_0^p (-1)^{n+1}\,f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^p f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right)$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{((-1)^{n+1}+1)}{p}\left(\int_0^p f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right)}$$

Luego $\quad a_n = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{p}\left(\displaystyle\int_0^p f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right) & ,\ \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

De forma similar se demuestra que:

$$\boxed{b_n = \frac{((-1)^{n+1}+1)}{p}\left(\int_0^p f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right)}$$

Luego $\quad b_n = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{2}{p}\left(\displaystyle\int_0^p f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right) & ,\ \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

d) Como $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda por $f(-t)=f(t)$; $f\left(t+\frac{1}{2}T\right)=-f(t)$ y de las partes b) y c) se tiene: $b_n=0$, $a_{2n}=0$, para todos los valores de n incluyendo a_0 .
En consecuencia la serie de Fourier es:

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos((2n-1)\omega_0 t)}$$

Veamos el coeficiente:

$$a_{2n-1}=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt$$

$$=\frac{2}{p}\left(\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt+\int_{\frac{p}{2}}^{p} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt\right)\qquad\cdots\cdots(I)$$

En la segunda integral

$$\int_{\frac{p}{2}}^{p} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt=\int_{\frac{p}{2}}^{p} f(u)\cos((2n-1)\,\omega_0\,u)\,du$$

Cambiando de variable $u=t+\frac{T}{2}=t+p \quad\Rightarrow\quad t=u-p \quad , \ du=dt$

Además $(u=p \ \Rightarrow\ t=0)$ y $(u=\frac{p}{2}\ \Rightarrow\ t=-\frac{p}{2})$

Reemplazando:

$$\int_{\frac{p}{2}}^{p} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt=\int_{-\frac{p}{2}}^{0} f(t+\frac{T}{2})\cos((2n-1)\,\omega_0\,(t+\frac{T}{2}))\,du$$

$$=\int_{-\frac{p}{2}}^{0} f(t+p)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t+(2n-1)n\pi)\,du$$

Como: $f(t+p)=f\left(t+\frac{1}{2}T\right)=-f(t)$ y $\cos(u+(2n-1)n\pi)=-\cos(u)$

Así, tenemos:

$$\boxed{\int_{\frac{p}{2}}^{p} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt=\int_{-\frac{p}{2}}^{0} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,du}$$

Reemplazando en (I) y considerando que las funciones $f(t)$ y $\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)$ son pares.

$$a_{2n-1}=\frac{2}{p}\left(\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt+\int_{-\frac{p}{2}}^{0} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,du\right)$$

$$=\frac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt=\frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a_{2n-1}=\frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\cos((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt}$$

e) Como $f(t)$ tiene simetría de cuarto de onda por $f(-t)=-f(t)$; $f\left(t+\frac{1}{2}T\right)=-f(t)$ y de las partes b) y c) se tiene: $a_n=0$, $b_{2n}=0$, para todos los valores de n incluyendo a_0 .
En consecuencia la serie de Fourier es:

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\operatorname{sen}((2n-1)\omega_0 t)}$$

La demostración se sigue como lo anterior por lo que el coeficiente es:

$$\boxed{b_{2n-1}=\frac{4}{p}\int_0^{\frac{p}{2}} f(t)\operatorname{sen}((2n-1)\,\omega_0\,t)\,dt}$$

Simetrías y Coeficientes de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$	senos y cosenos
Par	$a_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$b_n=0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n=0$	$b_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2}f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$	únicamente senos
Media onda	$a_n=\begin{cases}0 & n\text{ par}\\ \frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt & n\text{ impar}\end{cases}$	$b_n=\begin{cases}0 & n\text{ par}\\ \frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt & n\text{ impar}\end{cases}$	Senos y cosenos impares

EXPANSIONES DE MEDIO RANGO

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo $T = 2p$ y $f(-t) = f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t\,, \qquad \text{donde:} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{p}$$

- Si $f(t)$ es par $\quad\Rightarrow\quad f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$

  Donde: $\quad a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$

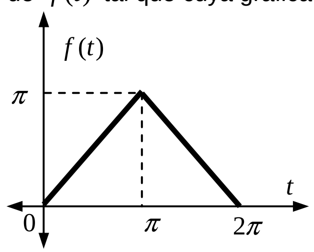
- Si $f(t)$ es impar $\Rightarrow f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$

  Donde: $\quad a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$

De acuerdo a los expresiones donde se hallan los coeficientes, solo se necesita que la función $f(t)$ esté definida en el intervalo finito $[0, p]$, entonces las series de Fourier representan ambas una misma función $f(t)$ dada en el intervalo $[0, p]$ y fuera de este intervalo la serie par o impar respectivamente y se denominan “Expansión de medio rango)” de la función $f(t)$.

Ejemplo 01:

Hallar la serie de medio rango de $f(t)$ tal que cuya gráfica es:

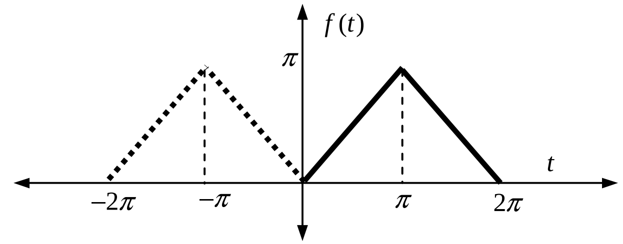


Del gráfico se puede definir la función $f(t)$ como:

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t \le \pi \\ 2\pi - t & , \quad \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

A continuación, definamos las extensiones periódicas de la siguiente manera:

a) Podemos definir una extensión periódica par, donde $T = 4\pi$, $p = 2\pi$



Utilizando: $\quad f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2\pi}\right) \quad\Rightarrow\quad f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)$

Sus coeficientes son:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_0^{\pi} t\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt}_{Parte\ \text{I}} + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt}_{Parte\ \text{II}}\right) \quad \cdots(*)$$

Calculando, por el método por partes:

Parte I:
$$\int_0^{\pi} t\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{2t}{n}\text{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)dt = \frac{2\pi}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \frac{2\pi}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2}\cos(0)$$
$$= \frac{2\pi}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2}$$

Parte II:
$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt = \frac{2}{n}(2\pi - t)\text{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\text{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$
$$= -\frac{2\pi}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -\frac{2\pi}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Reemplazando en $(*)$, se tiene:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2}-\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{8}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2}\left[1+\cos(n\pi)\right]\right)\quad=\frac{8}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1+\cos(n\pi)}{2}\right)$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{a_n=\frac{8}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

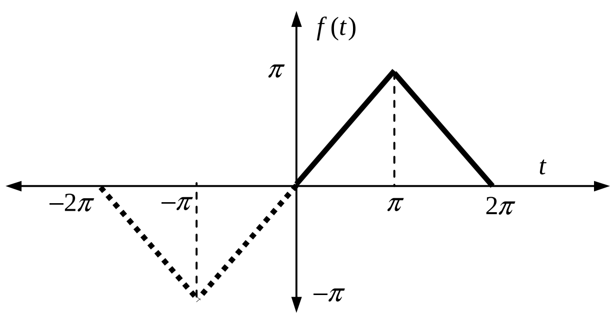
Como: $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}-2\ , & n=4k-2\\ 0\ , & n\neq 4k-2\end{cases}$

En consecuencia: $a_{4k-2}=-\dfrac{16}{(4k-2)^2\,\pi}$

Reemplazando en la serie de Fourier: $f(t)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-2)^2}\cos\left(\frac{(4n-2)\,t}{2}\right)\right]$

$$\Rightarrow\quad\boxed{f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-2)^2}\cos((2n-1)\,t)\right]}$$

b) Podemos definir una extensión periódica impar , donde $T=4\pi$, $p=2\pi$



Utilizando: $f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2\pi}\right)\quad\Rightarrow\quad f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\,t}{2}\right)$

Veamos el coeficiente:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_0^{\pi}t\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt}_{\text{Parte I}}+\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt}_{\text{Parte II}}\right)\quad\cdots(**)$$

Parte I: Por el método por partes

$$\int_0^{\pi}t\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt=-\frac{2t}{n}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt\ =-\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Parte II: Por el método por partes

$$\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)dt=-\frac{2}{n}(2\pi-t)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt$$

$$=\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{2}{n}\int_{\pi}^{2\pi}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)dt\ =\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}(n\pi)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ =\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Reemplazando en $(**)$, se tiene:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2\pi}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{4}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{b_n=\frac{8}{n^2\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Analizando el coeficiente $b_{2k}=0$ $\qquad b_{2k-1}=(-1)^{k-1}\dfrac{8}{(2k-1)^2\,\pi}$

Luego la serie de Fourier es:

$$\boxed{f(t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\,t}{2}\right)\right]}$$

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER

Teorema

a) Sea $f(t)$ una función continua en $[-p,p]$ y $f(-p)=f(p)$, además $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciables. Entonces la serie de Fourier de:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

Entonces:

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\omega_0(-a_n\operatorname{sen} n\omega_0 t+b_n\cos n\omega_0 t)$$

b) Sea $f(t)$ una función continua por tramos en el intervalo $[-p,p]$ y $f(t+2p)=f(t)$
Entonces:

$$\int_A^B f(t)\,dt=\frac{a_0}{2}(B-A)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}\left[-b_n(\cos n\omega_0 A-\cos n\omega_0 B)+a_n(\operatorname{sen} n\omega_0 B-\operatorname{sen} n\omega_0 A)\right]$$

donde: $A<B$ y $A,B\in[-p,p]$.

Demostración:

a) Se cumple que:
$f(t)$ es periódica de periodo $T=2p$, entonces podemos probar que $f'(t)$ es periódica, de periodo $T=2p$.
En efecto: $f(t+2p)=f(t)\quad \forall t \quad\Rightarrow\quad f'(t+2p)=f'(t)\quad \forall t$
Luego como $f'(t)$ es periódica de periodo $T=2p$, podemos escribir:

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\omega_0 t+\beta_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)\qquad \cdots\cdots(*)$$

Donde:

$$\boxed{\alpha_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f'(t)\,dt}\ ;\ \boxed{\alpha_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f'(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt}\ ;\ \boxed{\beta_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f'(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt}$$

Calculemos los coeficientes:

Calculemos: $\boxed{\alpha_0}$

$$\alpha_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f'(t)\,dt=\frac{1}{p}f(t)\Big|_{-p}^{p}=\frac{1}{p}\left[f(p)-f(-p)\right]=0\qquad\Rightarrow\ \boxed{\alpha_0=0}$$

Calculemos: $\boxed{\alpha_n}$

Como: $\alpha_n=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p}f'(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt$.

Integrando por partes: $u=\cos n\omega_0 t$ $\quad dv=f'(t)\,dt$
$du=-n\,\omega_0\,sen(n\,\omega_0\,t)\,dt$ $\quad v=f(t)$

$$\alpha_n=\frac{1}{p}\left(f(t)\cos n\omega_0 t\,\Big|_{-p}^{p}-\int_{-p}^{p}-n\omega_0\,f(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{p}\underbrace{\left[f(p)(-1)^n-f(-p)(-1)^n\right]}_{=0}+n\,\omega_0\underbrace{\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt}_{b_n}\qquad=n\,\omega_0\,b_n$$

$$\Rightarrow\qquad \boxed{\alpha_n=n\,\omega_0\,b_n}$$

Calculemos: $\boxed{\beta_n}$

Como: $\beta_n=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p}f'(t)\operatorname{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt$.

Integrando por partes: $u=\operatorname{sen} n\omega_0 t$ $\quad dv=f'(t)\,dt$
$du=n\omega_0\cos(n\omega_0 t)\,dt$ $\quad v=f(t)$

$$\beta_n=\frac{1}{p}\left(f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,\Big|_{-p}^{p}-\int_{-p}^{p}n\omega_0\,f(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{p}\underbrace{\left[f(p)\operatorname{sen}(n\omega_0\,p)-f(-p)\operatorname{sen}(-n\omega_0\,p)\right]}_{=0}-n\omega_0\underbrace{\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\cos(n\,\omega_0 t)\,dt}_{a_n}\qquad=n\,\omega_0\,b_n$$

$$\Rightarrow\qquad \boxed{\beta_n=-n\,\omega_0\,a_n}$$

En consecuencia, reemplazando los coeficientes en $(*)$:

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\omega_0(-a_n\operatorname{sen} n\omega_0 t+b_n\cos n\omega_0 t)$$

NOTA:
Una manera de demostrar la derivada de la serie de Fourier es derivar directamente dicha serie:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t)$$

Lo que conduce a:

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\omega_0(-a_n\operatorname{sen} n\omega_0 t+b_n\cos n\omega_0 t)$$

b) Si $f(t)$ es periódica de periodo $T=2p$ y $F(t)=\int_0^t f(t)dt-\frac{a_0\,t}{2}$, donde; $a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt$,

se ha probado que $F(t)$ es periódica de periodo $T=2p$.

Podemos los siguientes resultados:

1. $F'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$
2. $F'(t)$ es periódica de periodo $T=2p$

Además y como consecuencia de lo anterior:

$$F(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\,\omega_0\,t+\beta_n\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,t) \qquad \cdots\cdots(**)$$

Donde:

$$\boxed{\alpha_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F(t)\,dt}\;;\;\boxed{\alpha_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt}\;;\;\boxed{\beta_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F(t)\,\mathrm{sen}\,(n\,\omega_0\,t)\,dt}$$

Calculemos: $\boxed{\alpha_n}$

$$\alpha_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

Integrando por partes:

$$u=F(t) \qquad dv=\cos n\,\omega_0\,t\,dt$$
$$du=F'(t)\,\mathrm{dt} \qquad v=\frac{\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,t}{n\,\omega_0}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{p}\frac{sen(n\,\omega_0\,t)}{n\,\omega_0}F(t)\Big|_{-p}^{p}-\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F'(t)\frac{sen(n\,\omega_0\,t)}{n\,\omega_0}\,dt$$

$$=\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\left(\underbrace{sen(n\,\omega_0\,p)}_{=0}F(p)-\underbrace{sen(-n\,\omega_0\,p)}_{=0}F(-p)\right)-\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\int_{-p}^{p}F'(t)\,sen(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\int_{-p}^{p}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)sen(n\,\omega_0\,t)\,dt \qquad \text{pues: } F'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$$

$$=-\frac{1}{n\,\omega_0}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\,sen(n\,\omega_0\,t)\,dt-\frac{a_0}{2p}\underbrace{\int_{-p}^{p}sen(n\,\omega_0\,t)\,dt}_{=0}\right)$$

$$=-\frac{1}{n\,\omega_0}b_n \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha_n=-\frac{b_n}{n\,\omega_0}}$$

Calculemos: $\boxed{\beta_n}$

$$\beta_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F(t)\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

Integrando por partes:

$$u=F(t) \qquad dv=\mathrm{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt$$
$$du=F'(t)\,\mathrm{dt} \qquad v=-\frac{\cos(n\,\omega_0\,t)}{n\,\omega_0}$$

$$\beta_n=-\frac{1}{p}\frac{\cos(n\,\omega_0\,t)}{n\,\omega_0}F(t)\Big|_{-p}^{p}+\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F'(t)\frac{\cos(n\,\omega_0\,t)}{n\,\omega_0}\,dt$$

$$=-\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\left(\underbrace{\cos(n\,\omega_0\,p)}_{(-1)^n}F(p)-\underbrace{\cos(-n\,\omega_0\,p)}_{(-1)^n}F(-p)\right)+\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\int_{-p}^{p}F'(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt$$

$$=-\frac{(-1)^n}{p\,n\,\omega_0}\left(\underbrace{F(p)-F(-p)}_{=0}\right)+\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\int_{-p}^{p}F'(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt \qquad \text{, pues } F(t) \text{ es periódica}$$

$$=\frac{1}{p\,n\,\omega_0}\int_{-p}^{p}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt \qquad \text{pues: } F'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$$

$$=\frac{1}{n\,\omega_0}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt-\frac{a_0}{2p}\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt}_{=0}\right)$$

$$=\frac{1}{n\,\omega_0}a_n \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta_n=\frac{a_n}{n\,\omega_0}}$$

Por lo tanto, reemplazando los resultados anteriores en $(**)$, se tiene:

$$\boxed{F(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}(-b_n\cos n\,\omega_0\,t+a_n\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,t)} \qquad \cdots\cdots(***)$$

Sea $A,B\in[-p,p]$ donde $A<B$, reemplazando en $(***)$

$$F(B)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}(-b_n\cos n\,\omega_0\,B+a_n\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,B)$$

$$F(A)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}(-b_n\cos n\,\omega_0\,A+a_n\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,A)$$

Restando miembro a miembro, se tiene:

$$F(B)-F(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}\left[b_n(\cos n\,\omega_0\,A-\cos n\,\omega_0\,B)+a_n(\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,B-a_n\mathrm{sen}\,n\,\omega_0\,A)\right] \quad \cdots(\Delta)$$

Del primer miembro y como $F(t)=\int_0^t f(t)dt-\frac{a_0\,t}{2}$, se tiene:

$$F(B)-F(A)=\int_0^B f(t)dt-\frac{a_0\,B}{2}-\left(\int_0^A f(t)dt-\frac{a_0\,A}{2}\right)=\int_0^B f(t)dt-\frac{a_0\,B}{2}-\int_0^A f(t)dt+\frac{a_0\,A}{2}$$

$$=\int_A^0 f(t)dt+\int_0^B f(t)dt-\frac{a_0}{2}(B-A)=\int_A^B f(t)dt-\frac{a_0}{2}(B-A)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(B)-F(A)=\int_A^B f(t)dt-\frac{a_0}{2}(B-A)}$$

Reemplazando en (Δ), resulta:

$$\int_A^B f(t)dt-\frac{a_0}{2}(B-A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}\left[-b_n(\cos n\,\omega_0\,B-\cos n\,\omega_0\,A)+a_n(\operatorname{sen} n\,\omega_0\,B-a_n\operatorname{sen} n\,\omega_0\,A)\right]$$

En consecuencia:

$$\boxed{\int_A^B f(t)dt=\frac{a_0}{2}(B-A)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\omega_0}\left[-b_n(\cos n\,\omega_0\,B-\cos n\,\omega_0\,A)+a_n(\operatorname{sen} n\,\omega_0\,B-a_n\operatorname{sen} n\,\omega_0\,A)\right]}$$ L.q.q.d.

Ejemplo 02:

a) Hallar la serie de Fourier de la función: $f(t)=t^4-2\pi^2t^2$, $-\pi\le t\le\pi$
$f(t+2\pi)=f(t)$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$

b) Calcular la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$ aplicando el teorema de PARSEVAL

c) Calcular la suma de la serie de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

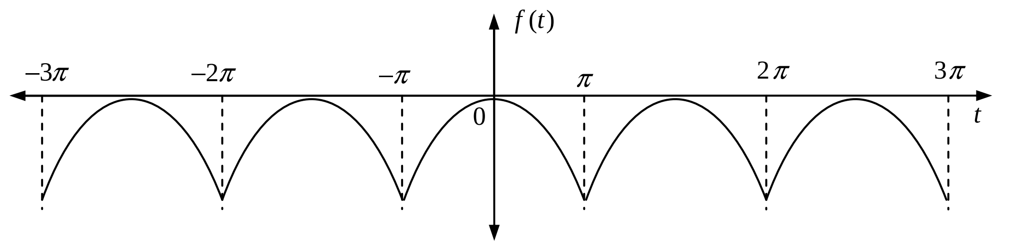
d) Hallar la serie de Fourier de la función $g(t)=t(t^2-\pi^2)$ mediante la función $f(t)$.

e) Calcular la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$, aplicando la serie de PARSEVAL

f) Hallar la serie de Fourier de la función $g(t)=\frac{t}{5}(3t^4-10\pi^2t^2+7\pi^4)$, utilizando la función $f(t)$ de la parte $a)$.

Solución:

a) Construyendo la gráfica de la función $f(t)$



$f(t)$ es una función par, entonces las serie de Fourier es:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\,\omega_0\,t \qquad T=2p=2\pi \quad , \ \omega_0=\frac{\pi}{p}=\frac{\pi}{\pi}=1$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos n\,\omega_0\,t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)\cos n\,\omega_0\,t\,dt$$

Integrando sucesivamente por partes se tiene:

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos n\,\omega_0\,t\,dt=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{24\pi(-1)^n}{n^4}\right)=-\frac{48(-1)^n}{n^4}$$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)\,dt=-\frac{14}{15}\pi^4$$

Como: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\,\omega_0\,t$ Entonces: $f(t)=-\frac{7}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos n\,t$

b) Recordando PARSEVAL $\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}(f(t))^2=\dfrac{a_0^2}{4}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)^2=\frac{\left(-\frac{14}{15}\pi^4\right)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{48(-1)^n}{n^4}\right)^2+(0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^4-2\pi^2t^2)^2=\frac{\left(\frac{196}{225}\pi^8\right)}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2304}{n^8}(-1)^{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(t^8-4\pi^2t^6-4\pi^4t^4)}=\frac{49}{225}\pi^8+1152\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{107}{315}\pi^8=\frac{49}{225}\pi^8+1152\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^8}\right) \qquad \Rightarrow \quad 1152\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^8}\right)=\frac{535-343}{1575}\pi^8$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^8}\right)=\frac{\pi^8}{9450}}$$

c) $f(t)=-\dfrac{7}{15}\pi^4-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos nt$, $\quad\Rightarrow\quad t^4-2\pi^2t^2=-\dfrac{7}{15}\pi^4-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos nt$

Haciendo: $\boxed{t=\pi}$ $\qquad -\pi^4=-\dfrac{7}{15}\pi^4-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos n\pi$ $\qquad$ se sabe: $\cos n\pi=(-1)^n$

$$\Rightarrow 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}(-1)^n=\pi^4-\frac{7}{15}\pi^4 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

d) Como $f(t)=t^4-2\pi^2t^2 \quad\Rightarrow\quad f'(t)=4t^3-4\pi^2t$,

$f'(t)=4(t^3-\pi^2t)$ es continua en $[-\pi,\pi]$, además $f(-\pi)=f(\pi)=-\pi^4$, $f'(t)$ es continua por tramos.

$f(t)=-\dfrac{7\pi^4}{15}-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nt}{n^4}$, derivando $f'(t)=-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(-\operatorname{sen}nt)}{n^3}=48\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\operatorname{sen}(nt)}{n^3}$

$$4(t^3-\pi^2t)=48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen}(nt)}{n^3} \quad\Rightarrow t^3-\pi^2t=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen}(nt)}{n^3}$$

$$\therefore \quad g(t)=t(t^2-\pi^2)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen}(nt)}{n^3}$$

e) Por Parseval

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}g^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^3-\pi^2t)^2\,dt=0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n12}{n^3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^6-2\pi^2t^4+\pi^4t^2)\,dt=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{144}{n^6} \quad\Rightarrow\quad 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^7}{7}-2\pi^2\frac{t^5}{5}+\pi^4\frac{t^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\pi^7}{7}-2\pi^2\frac{\pi^5}{5}+\pi^4\frac{\pi^3}{3}\right)-\left(\frac{(-\pi)^7}{7}-2\pi^2\frac{(-\pi)^5}{5}+\pi^4\frac{(-\pi)^3}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^7}{7}-\frac{2}{5}\pi^7+\frac{\pi^7}{3}+\frac{\pi^7}{7}-\frac{2}{5}\pi^7+\frac{\pi^7}{3}\right] \quad\Rightarrow\quad 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^7}{7}-\frac{2}{5}\pi^7+\frac{\pi^7}{3}\right]$$

$$\Rightarrow 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\pi^6\left[\frac{15-42+35}{105}\right] \quad\Rightarrow 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{8}{105}\pi^6 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}}$$

f) La serie de Fourier $f(t)=t^4-2\pi^2t^2=-\dfrac{7}{15}\pi^4-48\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}\cos nt$

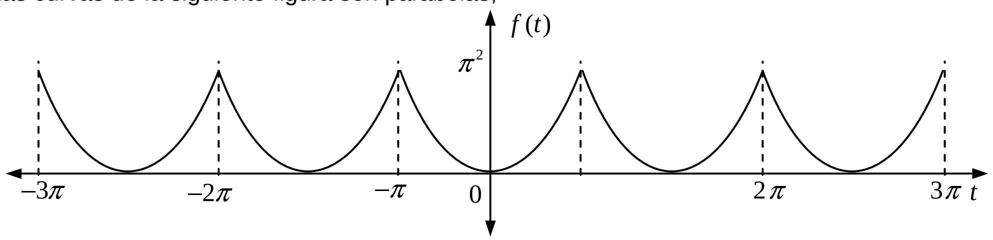
Integrando $\displaystyle\int_0^t(t^4-2\pi^2t^2)\,dt=-\frac{7}{15}\pi^4\int_0^t dt-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\int_0^t\cos nt\,dt$

$$\Rightarrow \frac{t^5}{5}-2\pi^2\frac{t^3}{3}=-\frac{7}{15}\pi^4t-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\frac{\operatorname{sen}nt}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{15}(3t^4-10\pi^2t+7\pi^4)=-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}\operatorname{sen}nt$$

Ejemplo 03

Las curvas de la siguiente figura son parábolas,



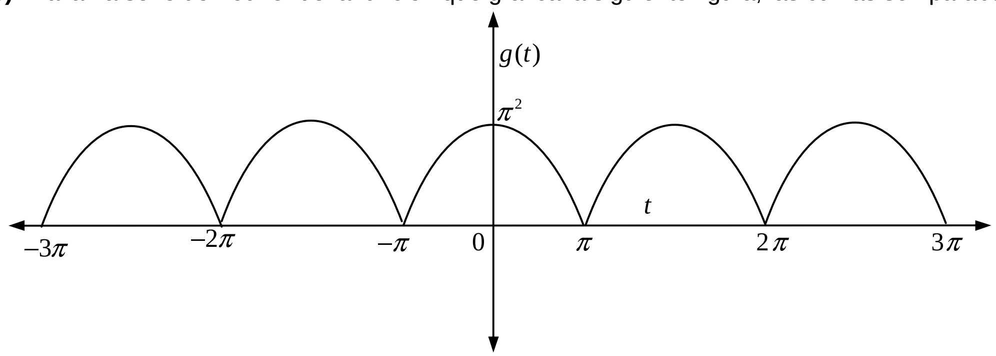
a) Desarrollar la serie de Fourier de la función

b) Hallar la Serie de Fourier de la derivada de la función.

c) Utiliza el resultado para calcular la suma de la serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

d) Calcular los valores de las serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

e) Hallar la serie de Fourier de la función que gráfica la siguiente figura, las curvas son parábolas.



f) Hallar la Serie de Fourier de la derivada de la función anterior.

Solución:

a) La función es periódica es definida como: $f(x) = t^2$, $-\pi \le t \le \pi$ donde: $f(t + 2\pi) = f(t)$

Su periodo es: $T = 2\pi \;\Rightarrow\; p = \pi \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{p} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_0 = 1}$

Como la función es par, luego se trata de una serie de cosenos $b_n = 0$

La serie de Fourier tendrá la forma: $t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt)$

Calculando $\boxed{a_0}$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\, dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \;\Rightarrow\; \boxed{a_0 = \frac{2}{3}\pi^2}$$

Calculando $\boxed{a_n}$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\, \cos(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt$$

Calculando la integral por partes (dos veces)

$$u = t^2 \qquad dv = \cos nt\; dt$$

$$du = 2t\, dt \qquad v = \frac{\operatorname{sen} nt}{n}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^2 \operatorname{sen} nt}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt\; dt\right) = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt\; dt$$

$$u = t \qquad dv = \operatorname{sen} nt\; dt$$

$$du = dt \qquad v = -\frac{\cos nt}{n}$$

$$a_n = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{t\cos nt}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nt\; dt\right) = -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{t\cos nt}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{t \operatorname{sen} nt}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi}\,\frac{\pi\cos n\pi}{n} = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

La serie de Fourier de la función dada es:

$$\boxed{f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)}$$

b) Haciendo el cálculo de la derivada de la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ es decir:

$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$ y $f\,'(t) = 2t$, continua por tramos y su serie de Fourier es:

$$f\,'(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-n)\operatorname{sen} nt}{n^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f\,'(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nt}{n}}$$

c) Haciendo $t=\pi$, tenemos:

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi)\right) \;\Rightarrow\; \pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow \pi^2-\frac{\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \;\Rightarrow\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2\pi^2}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}}$$

d) Haciendo $t=0$, tenemos:

$$f(0)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(0)\right) \;\Rightarrow\; 0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \;\Rightarrow 0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=-\frac{\pi^2}{12} \;\Rightarrow\; (-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{12}}$$

e) Los puntos $(-\pi,0)$, $(0,\pi^2)$, $(\pi,0)$ están en la parábola.

$$g(t)=\pi^2-t^2 \qquad -\pi\le t\le\pi; \qquad g(t+2\pi)=g(t)$$

Se tiene que el periodo: $T=2\pi \quad\Rightarrow\quad p=\pi$

Además, de acuerdo al ejercicio de la parte a) , podemos escribir:

$$g(t)=\pi^2-f(t)$$

Como: $\quad f(t)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$

Entonces:

$$g(t)=\pi^2-\left[\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\right] \Rightarrow g(t)=\pi^2-\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

$$g(t)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-1)^n}{n^2}\cos(nt) \quad\Rightarrow\quad \boxed{g(t)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nt)}$$

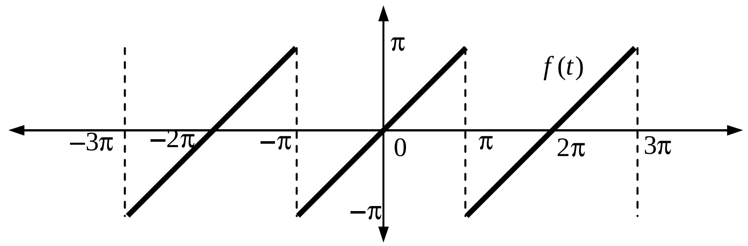
f) Haciendo el cálculo de su serie de Fourier de $f'(t)$ es decir:

$f(t)=\dfrac{2\pi^3}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt$ y $f'(t)=-2t$, continua por tramos y su serie de Fourier es:

$$f'(t)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-n)\,\mathrm{sen}(nt)}{n^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(t)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{sen}(nt)}{n}}$$

Ejemplo 04:

En la figura, expresa la función periódica $f(t)$:

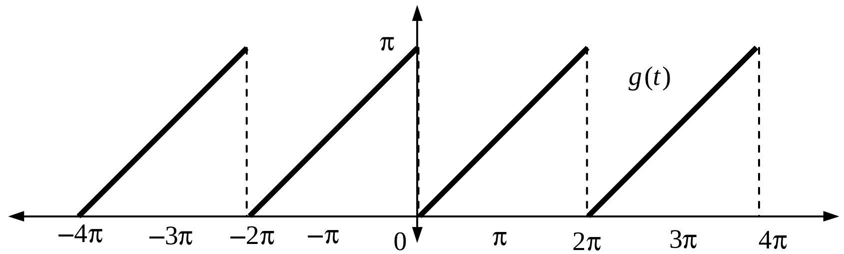


a) Calcular la serie de Fourier de la función $f(t)$ descrita.

b) Utiliza el resultado para calcular: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

c) Calcular el error cuadrático medio en la aproximación de la serie finita de Fourier en 5 términos.

d) En la figura, hallar la serie de Fourier , según la función periódica $f(t)$:



e) En MatLab, graficar la serie para S_n de la función $g(t)$ anterior.

Solución:

a) La función $f(t)$, es definida como: $\qquad f(t)=t \qquad -\pi\le t\le\pi$

Donde: $T=2\pi \quad\Rightarrow p=\pi \quad$ y $\quad \boxed{\omega_0=1}$

La función es impar, luego se trata de una serie de cosenos $a_n=0 \quad n=0,1,2,3,4,\cdots$

Entonces, la serie de Fourier tiene la forma $\quad \boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}(nt)}$

Calculando $\boxed{b_n}$

$$\mathrm{b}_n=\frac{1}{p}\int_a^{a+2p}f(t)\,sen\frac{n\pi}{p}t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,sen\frac{n\pi}{\pi}t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\,\mathrm{sen}\,\pi t\,dt$$

Por el método por partes en la última integral, tenemos:

$$u = t \qquad dv = \operatorname{sen} nt\, dt$$

$$du = dt \qquad v = -\frac{\cos nt}{n}$$

Entonces $b_n = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{t\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt \right) = \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{t\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{t \operatorname{sen} nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-(\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)) \right] = \frac{1}{n\pi}(-2\pi\cos n\pi) = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}}$$

En consecuencia la serie de Fourier, tendría la forma: $\boxed{f(t) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt)}$

b) Haciendo en la serie de Fourier $t = \dfrac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Se sabe que: $\operatorname{sen}\left((2k)\dfrac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$, además: $\operatorname{sen}\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2} \right) = (-1)^{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \cdots$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2k-1)+1}}{(2k-1)}(-1)^{k+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

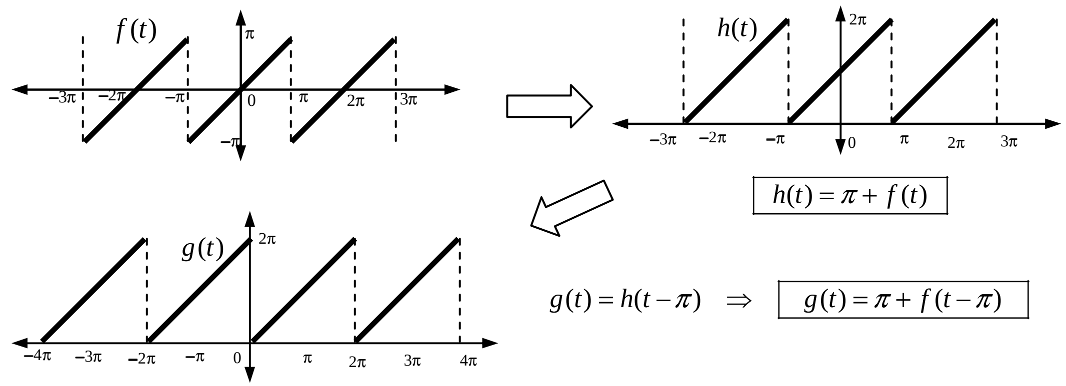
Re-indexando los índices se obtiene: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$

c) Como el error cuadrático medio es: $E_k = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} [f(t)]^2\, dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_k^2 + b_k^2)$

$$E_5 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1} \right]^2 \Rightarrow E_5 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\frac{4}{n^2} \Rightarrow E_5 = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow E_5 = \frac{(3.1416)^2}{3} - 2\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E_5 = 0.363...}$$

d) Para obtener la función $g(t)$, a la función $f(t)$ se le hace una transformación mediante traslaciones horizontales y verticales:



$$\boxed{h(t) = \pi + f(t)}$$

$$g(t) = h(t-\pi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(t) = \pi + f(t-\pi)}$$

Como $\boxed{f(t) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt)}$ entonces $g(t) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n(t-\pi))$

Sabemos que: $\operatorname{sen}(n(t-\pi)) = \operatorname{sen}(nt - n\pi) = -\operatorname{sen}(n\pi - nt) = (-1)^n \operatorname{sen}(nt)$

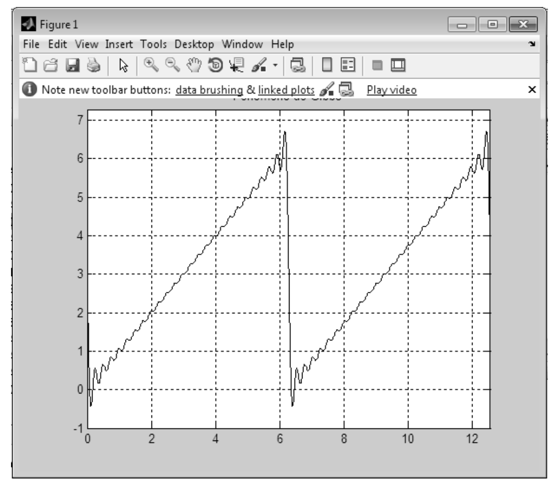
Reemplazando, tenemos: $g(t) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n \operatorname{sen}(nt) \Rightarrow g(t) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} \operatorname{sen}(nt)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}}$$

e) El código en matLab, para la grafica de la $S_n(t)$, La serie finita de Fourier de la función $g(t)$, es:
Crear un archivo **m-file** de nombre **sumpar2.m**

```
function sumpar2(n,m)
x = 0:0.0001:m*pi;
s = zeros(size(x)); for k=1:n
 s=s+(sin(k*x)/k);
end
s = pi-2*s;
plot(x, s, 'r'),grid;

title('Fenómeno de Gibbs');
axis([min(x) max(x) -1 2*pi+1]);
```



Si se utiliza como >>Sumpar2(30,4)
Grafica S_{30} en el intervalo $[0, 4\pi]$

Si se utiliza como >>Sumpar2(20,8)
Grafica S_{20} en el intervalo $[0, 8\pi]$