UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

# SERIES DE FOURIER

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

2



## APROXIMACIÓN MEDIANTE UNA SERIE FINITA DE FOURIER

Consideremos, la aproximación a $f(t)$, como:

$$\boxed{S_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)}\quad \text{Donde}\quad \omega_0=\frac{\pi}{p}$$

La suma de los $(2k+1)$ términos de una serie de Fourier que representa a $f(t)$ en el intervalo $[-p,p]$.

Llamamos el error entre $f(t)$ y su aproximación, como $\varepsilon_k(t)=f(t)-S_k(t)$

También llamamos ***el error cuadrático medio***, denotado por $E_k$ y está definido como:

$$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}[\varepsilon_k(t)]^2\,dt$$

$$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}[f(t)-S_k(t)]^2\,dt$$

$$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]^2 dt$$

**TEOREMA**

Si la serie finita de Fourier $S_k(t)$ se aproxima a $f(t)$, entonces, la aproximación tiene la propiedad de ser él mínimo error cuadrático medio.

***Demostración***

Si consideramos a $E_k$ como una función de $a_0$, $a_n$ y $b_n$, entonces para que el error cuadrático medio $E_k$ sea mínimo, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0}=0\,,\qquad \frac{\partial E_k}{\partial a_n}=0\,,\qquad \frac{\partial E_k}{\partial b_n}=0\,,\quad n=1,2,3,\cdots,k\,.$$

En efecto:

**Veamos:** $\boxed{\dfrac{\partial E_k}{\partial a_0}=0}$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_0}=\frac{\partial}{\partial a_0}\left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]^2 dt\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2p}\, 2\int_{-p}^{p}\left[ f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]\left(-\frac{1}{2}\right)dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[ f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2p}\left[\underbrace{\int_{-p}^{p} f(t)dt}_{p\,a_0}-\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-p}^{p} dt}_{2p}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \underbrace{\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0 t\, dt}_{=0}+b_n\underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt}_{=0}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2p}\left[p\, a_0-\frac{a_0}{2}(2p)\right]=0$$

**Veamos:** $\boxed{\dfrac{\partial E_k}{\partial a_n}=0}$

$$\frac{\partial E_k}{\partial a_n}=\frac{\partial}{\partial a_n}\left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[ f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2p}\, 2\int_{-p}^{p}\left[ f(t)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]\left(-\delta_n^k \cos n\omega_0 t\right)dt \qquad \text{donde } \delta_n^k=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

$$=-\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\left[ f(t)\,\delta_n^k \cos n\omega_0 t-\frac{a_0}{2}\cos n\omega_0 t-\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\, \delta_n^k \cos^2 n\omega_0 t + b_n\, \delta_n^k \operatorname{sen} n\omega_0 t \cos n\omega_0 t\right)\right]dt$$

$$=-\frac{1}{p}\left[\underbrace{\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt}_{p\,a_n}-\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0 t\, dt}_{=0}-\left(a_n\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos^2 n\omega_0 t\, dt}_{=p}+b_n\underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen} n\omega_0 t\cos n\omega_0 t\, dt}_{=0}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{p}\left[p\, a_n-a_n\, p\right]=0$$

Análogamente se tiene: $\boxed{\dfrac{\partial E_k}{\partial b_n}=0}$



**PROPOSICIÓN**

(I) $$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)S_k(t)\, dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

(II) $$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$ **(Igualdad de Plancherel)**

(III) $$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

***En efecto:***

**Parte (I)**

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)S_k(t)\, dt=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)dt$$

$$=\frac{a_0}{2}\underbrace{\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\, dt}_{a_0}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\underbrace{\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt}_{a_n}+b_n\underbrace{\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt}_{b_n}\right)$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

**Parte (II)**

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right]^2 dt$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+2\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)+\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2\right]dt$$

$$=\frac{1}{2p}\left[\frac{a_0^2}{4}\int_{-p}^{p} dt+a_0\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0 t\, dt}_{=0}+b_n\underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt}_{=0}\right)+\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt\right]$$

$$=\frac{1}{2p}\left[\frac{a_0^2}{4}2p+\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt\right]$$

$$=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt} \qquad \ldots\ldots(*)$$

Hagamos un cálculo adicional:

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2=\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0\ t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{k}a_n^2\cos^2 n\,\omega_0\ t+\sum_{n=1}^{k}b_n^2\operatorname{sen}^2 n\,\omega_0\ t+2\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(a_n a_m\cos n\omega_0 t\cdot\cos m\omega_0 t\right)$$

$$+2\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(b_n b_m\operatorname{sen} n\omega_0 t\cdot\operatorname{sen} m\omega_0 t\right)+2\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(a_n b_m\cos n\omega_0 t\cdot\operatorname{sen} m\omega_0 t\right)$$

Integrando

$$\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt=\sum_{n=1}^{k}a_n^2\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos^2 n\,\omega_0\,t\ dt}_{=p}+\sum_{n=1}^{k}b_n^2\underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}^2 n\,\omega_0\ t\ dt}_{=p}$$

$$+2\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(a_n a_m\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0 t\cdot\cos m\omega_0 t\ dt}_{=0}\right)+2\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(b_n b_m\underbrace{\int_{-p}^{p}\operatorname{sen} n\omega_0 t\cdot\operatorname{sen} m\omega_0 t\ dt}_{=0}\right)$$

$$+2\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left(a_n b_m\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0 t\cdot\operatorname{sen} m\omega_0 t\ dt}_{=0}\right)$$

En consecuencia:

$$\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt=\sum_{n=1}^{k}a_n^2\ p+\sum_{n=1}^{k}b_n^2\ p=p\left(\sum_{n=1}^{k}a_n^2+\sum_{n=1}^{k}b_n^2\right)$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p}\left(\sum_{n=1}^{k}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\operatorname{sen} n\omega_0 t\right)\right)^2 dt=p\left(\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\right)}\quad\cdots\cdots(\Delta)$$

**Reemplazando** $(\Delta)$ **en** $(*)$

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2p}\,p\left(\sum_{n=1}^{k}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

**En consecuencia:**

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\qquad \text{L.q.q.d.}$$

**Parte (III)**

**Co mo:** $E_k=\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}\left[f(t)-S_k(t)\right]^2 dt$



$$E_k=\frac{1}{2p}\left(\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-2\int_{-p}^{p}f(t)S_k(t)\,dt+\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\underbrace{\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t)S_k(t)\,dt}_{(I)}+\underbrace{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[S_k(t)\right]^2 dt}_{(II)}$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)+\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

En consecuencia:

$$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\qquad \text{L.q.q.d.}$$

**PROPOSICIÓN**

1) $E_k\geq 0\quad ,\forall\ k=1,2,3,\cdots$

2) $\dfrac{a_0^2}{4}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt$

***En efecto:***

1) Como $\left[\varepsilon_k(t)\right]^2\geq 0\quad\forall\,k=1,2,3,\cdots$

Integrando desde $-p$ hasta $p$ y multiplicando por $\dfrac{1}{2p}$, es obtiene

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[\varepsilon_k(t)\right]^2 dt\geq 0\quad\Rightarrow\quad E_k\geq 0\quad\forall\,k=1,2,3,\cdots\quad\left(\text{pues: } E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[\varepsilon_k(t)\right]^2 dt\right)$$

2) Como $E_k\geq 0\quad\forall\,k=1,2,3,\cdots$ (por la parte anterior)

De la parte $(III)$ de la proposición anterior:

$$E_k=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\geq 0\qquad\forall\,k=1,2,3,\cdots$$

En consecuencia: $\dfrac{a_0^2}{4}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt$

**NOTA:** Tomando el límite con $k\to\infty$, se obtiene

$$\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt\qquad\textbf{(DESIGUALDAD DE BESSEL)}$$

**Recordar del curso de análisis**

Sea una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ , si se tiene que la sucesión se cumple:

a) $a_n \geq 0 \quad \forall\, n = 1,2,3,\cdots$

b) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una **sucesión decreciente**

Es decir: $a_k \geq a_{k+1} \quad \forall\, k = 1,2,3,\cdots$

**Entonces:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

**TEOREMA (IDENTIDAD DE PARSEVAL)**

Sea una función periódica $f(t)$ de periodo $T = 2p$ , donde $a_0, a_n$ $y$ $b_n$ son los coeficientes de la serie de Fourier de $f(t)$

**Entonces:**

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

**Demostración:**

Se sabe que ***el error cuadrático medio*** cumple:

$$E_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad \forall\, k = 1,2,3,\cdots \qquad (*)$$

La sucesión $\{E_k\}_{k\geq 1}$ , cumple:

a) $E_k \geq 0 \quad ,\forall\, k = 1,2,3,\cdots$ (por la proposición anterior)

b) $\{E_k\}_{k\geq 1}$ es una **sucesión decreciente**

En efecto: $E_{k+1} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt - \dfrac{a_0^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{k+1}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

Se puede escribir: $E_{k+1} = \underbrace{\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt - \dfrac{a_0^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}_{E_k} - \dfrac{1}{2}\left(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2\right)$

Por lo tanto: $E_{k+1} - E_k = -\dfrac{1}{2}\left(a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2\right) \leq 0 \quad \Rightarrow E_{k+1} \leq E_k \qquad \forall\, k = 1,2,3,\cdots$

$\Rightarrow \quad E_k \geq E_{k+1} \qquad \forall\, k = 1,2,3,\cdots$

En consecuencia: $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = 0$

De $(*)$ podemos decir: $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt - \dfrac{a_0^2}{4} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$

Tomando extremos: $\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt = \dfrac{a_0^2}{4} + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

Simplificando: $\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p}[f(t)]^2\,dt = \dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ L.q.q.d.



**LEMA DE RIEMANN LEBESGUE**

Si $g$ es una función continua por tramos en $[a,b]$ , entonces:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)sen(\lambda t)\,dt = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0$$

***Demostración:***

Llamemos: $\boxed{I(\lambda) = \int_a^b g(t)sen(\lambda t)\,dt} \qquad \cdots\cdots(I)$

Como $g$ es continua: $\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \exists\,\delta > 0$ / Si $|x-y| < \delta \ \Rightarrow\ |g(x)-g(y)| < \varepsilon \ ,\forall\, x,y \in [a,b]$

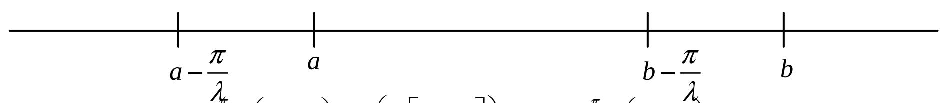
Dado $\varepsilon > 0$ Tomando: $x = t + \dfrac{\pi}{\lambda} \in [a,b] \qquad y = t \in [a,b]$

Si $\left|\left(t+\dfrac{\pi}{\lambda}\right) - t\right| = \dfrac{\pi}{\lambda} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|g\left(t-\dfrac{\pi}{\lambda}\right) - g(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Haciendo un cambio de variable en $(I)$ : Si $\boxed{x = t + \dfrac{\pi}{\lambda}}$ , $dx = dt$

Además $x = t + \dfrac{\pi}{\lambda} \in [a,b] \Rightarrow a \leq t + \dfrac{\pi}{\lambda} \leq b \Rightarrow a - \dfrac{\pi}{\lambda} \leq t \leq b - \dfrac{\pi}{\lambda} \Rightarrow t \in \left[a - \dfrac{\pi}{\lambda},\ b - \dfrac{\pi}{\lambda}\right]$

Gráficamente se presentan las áreas de integración




$$I(\lambda) = \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) sen\left(\lambda\left[t+\frac{\pi}{\lambda}\right]\right) dt = \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) sen\left(\lambda t + \pi\right) dt$$

Recordar reducción al primer cuadrante: $\operatorname{sen}(u+\pi) = -\operatorname{sen}(u)$

Entonces: $\boxed{I(\lambda) = -\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) sen(\lambda t)\,dt} \qquad \cdots\cdots(II)$

De $(I)$ y $(II)$ y las áreas de integración:

$$I(\lambda)=\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(t)sen(\lambda t)\,dt+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(t)sen(\lambda t)\,dt \qquad \cdots\cdots(III)$$

$$I(\lambda)=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)sen(\lambda t)\,dt-\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)sen(\lambda t)\,dt \qquad \cdots\cdots(IV)$$

Sumando miembro a miembro y agrupando:

$$2I(\lambda)=-\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a} g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)sen(\lambda t)\,dt+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}\left[g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]sen(\lambda t)\,dt+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b} g(t)sen(\lambda t)\,dt$$

$$\left|2I(\lambda)\right|\le\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a}\left|g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)sen(\lambda t)\right|dt+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}\left|\left[g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right]sen(\lambda t)\right|dt+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b}\left|g(t)sen(\lambda t)\right|dt$$

Como: $|\operatorname{sen} u|\le 1 \qquad \forall\, u\in\mathbb{R}$

$$2\left|I(\lambda)\right|\le\int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{a}\left|g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|dt+\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}}\left|g(t)-g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|dt+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^{b}\left|g(t)\right|dt$$

Por otro lado:

$g$ es una función continua en $[a,b]$ intervalo cerrado ( compacto), entonces la función es acotada

Es decir, existe un $M>0$, tal que: $|g(x)|\le M$, $\forall\, x\in[a,b]$

$$2\left|I(\lambda)\right|\le M\left(a-\left(a-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)+\frac{\varepsilon}{b-a}\left(\left(b-\frac{\pi}{\lambda}\right)-a\right)+M\left(b-\left(b-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right)$$

$$2\left|I(\lambda)\right|\le M\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a+\frac{\pi}{\lambda}\right)+M\frac{\pi}{\lambda}$$

$$\left|I(\lambda)\right|\le M\frac{\pi}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a-\frac{\pi}{\lambda}\right)$$

Tomando el límite para $\lambda\to\infty$ :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|I(\lambda)\right|\le\lim_{\lambda\to\infty}\left(M\frac{\pi}{\lambda}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right) \quad\Rightarrow\quad \lim_{\lambda\to\infty}\left|I(\lambda)\right|\le\varepsilon$$

Luego, se tiene $\forall\,\varepsilon>0$ se tiene: $\lim_{\lambda\to\infty}\left|I(\lambda)\right|\le\varepsilon$

En consecuencia: $\lim_{\lambda\to\infty}\left|I(\lambda)\right|=0$ por lo tanto: $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda)=0$

Es decir: $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)sen(\lambda x)\,dx=0$ L.q.q.d.

Analogamente se prueba que: $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)\cos(\lambda x)dx=0$



## CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo $T=2p$ y su serie de Fourier

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,\omega_n\,t+b_n\operatorname{sen} n\,\omega_n\,t) \quad \text{donde: } \omega_0=\frac{\pi}{p}$$

y los $a_0$, $a_n$ y $b_n$ son los coeficientes de Fourier de $f(t)$

Además $S_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\,\omega_n\,t+b_n\operatorname{sen} n\,\omega_n\,t)$ es la suma parcial .

***Entonces se cumplen***:

a) $$S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(z)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0(z-t)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}(z-t)\right)}dz$$

b) $$S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,\lambda}{2}\right)}d\lambda$$

c) $$f(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda$$

**d)** $\lim_{k\to\infty} S_k(t)=f(t)$ **(Convergencia uniforme para la series de Fourier)**

**e)** **(Convergencia puntual para series de Fourier)**

Si $f$ y $f'$ continuas por tramos en $(-p,p)$, entonces

La suma parcial de Fourier $S_k(t)$ , es convergente al punto $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ , $\forall\, t\in\mathbb{R}$

Es decir: $$\lim_{k\to\infty} S_k(t)=\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$$

**Demostración:**

**a)** Como: $S_k(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\,\omega_n\,t+b_n\operatorname{sen} n\,\omega_n\,t)$

$$S_k(t)=\frac{\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\,dz\right)}{2}+\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\cos n\,\omega_0\,z\,dz\right)\cos n\,\omega_0\,t+\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\operatorname{sen} n\,\omega_0\,z\,dz\right)\operatorname{sen} n\,\omega_0\,t$$

$$S_k(t)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(z)\,dz+\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\left(\cos n\,\omega_0\,z\cos n\,\omega_0\,t+\operatorname{sen} n\,\omega_0\,z\operatorname{sen} n\,\omega_0\,t\right)dz\right)$$

$$S_k(t)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(z)\,dz+\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\cos n\,\omega_0\,(z-t)\,dz\right)$$

$$\boxed{S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n\,\omega_0\,(z-t)\right)dz}\qquad\cdots\cdots(*)$$

Por otro lado:

Recordemos la identidad trigonométrica: $\boxed{\operatorname{sen} u-\operatorname{sen} v=2\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}$

Entonces, se cumple: $\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\omega_0\,s\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\omega_0\,s\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)\cos\left(n\,\omega_0 s\right)$

Aplicando Sumatoria.

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\omega_0\,s\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\omega_0\,s\right)\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0 s\right)$$

Por la propiedad del telescopio:

$\boxed{\sum_{n=1}^{k}h((2n+1)B)-h((2n-1)B)=h((2k+1)B)-h(B)}$, Tomando: $B=\dfrac{\omega_0\,s}{2}$ $\quad h(u)=sen(u)$

Se tiene: $\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,s\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0 s\right)$

Despejando $\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,s\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0 s\right)$

Factorizando $\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,s\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0 s\right)\right)$

$$\Rightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,s\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\,s}{2}\right)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0 s\right)\qquad\cdots(**)$$



Reemplazando en $(*)$ y tomando $s=z-t$

$$S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(z)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0(z-t)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}(z-t)\right)}dz$$

**b)** De lo anterior demostración, hacemos $z-t=\lambda$ de donde $dz=d\lambda$

Además $-p\le z\le p\quad\Rightarrow -p\le\lambda+t\le p\quad\Rightarrow -p-t\le\lambda\le p-t$

Reemplazando: $\boxed{S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p-t}^{p-t}f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda}\qquad(***)$

Si queremos aplicar: $\int_{a-p}^{a+p}f(t)\,dt=\int_{-p}^{p}f(t)\,dt$, donde $f(t)$ es periódica, de periodo $T=2p$.

Como $f(t+\lambda+2p)=f(t+\lambda)$ es una periódica, de periodo $T=2p$,

Bastaría ver que $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}$ es una función periódica, de periodo $T=2p$.

En efecto, De $(**)$ y como $n\,\omega_0 2p=2n\pi$:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0(\lambda+2p)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}(\lambda+2p)\right)}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0(\lambda+2p)\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0(\lambda+2p)\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0\lambda+2n\pi\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0\lambda\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0\,\lambda}{2}}$$

Por lo tanto, de $(***)$, tenemos:

$$\boxed{S_k(t)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda}\qquad\text{L.q.q.d.}$$

**c)** De $(**)$ se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\,\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0}{2}\lambda}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos\left(n\,\omega_0\,\lambda\right)$$

Integrando de $-p$ a $p$ respecto de $\lambda$, tenemos:

$$\int_{-p}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-p}^{p} dt}_{2p} + \sum_{n=1}^{k}\underbrace{\int_{-p}^{p}\cos(n\,\omega_0\lambda)\,d\lambda}_{=0}$$

$$\int_{-p}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = p \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = 1 \quad \cdots(\Delta)$$

Y por lo tanto: $$f(t) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0}{2}\lambda} d\lambda$$ L.q.q.d.

**d)** De las demostraciones de b) y c) restando tenemos:

$$S_k(t) - f(t) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\lambda}{2}\right)} d\lambda - \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\omega_0}{2}\lambda} d\lambda$$

$$S_k(t) - f(t) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \left[f(t+\lambda) - f(t)\right]\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\lambda}{2}\right)} d\lambda$$

Tomando: $$g(\lambda) = \frac{f(t+\lambda) - f(t)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0\lambda}{2}\right)}$$

$$S_k(t) - f(t) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(\lambda)\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right) d\lambda$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$, y por el LEMA DE RIEMANN LEBESGUE se tiene:

$$\lim_{k\to\infty}\left[S_k(t) - f(t)\right] = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(\lambda)\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right) d\lambda = 0$$

En consecuencia: $\lim_{k\to\infty} S_k(t) = f(t)$ L.q.q.d.



**e)** Por $(\Delta)$ se tiene $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = 1$, en esta integral, la función integrando es una función par. En consecuencia se tiene:

$$\frac{2}{p}\int_{0}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{2}{p}\int_{-p}^{0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{p}\int_{0}^{p} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{p}\int_{-p}^{0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{2}$$

Es por ello que se puede escribir:

$$\boxed{\frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x^+)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{2}f(x^+)} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{1}{p}\int_{-p}^{0} f(x^-)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{2}f(x^-)}$$

Si tomamos:

$$\frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda - \frac{1}{2}f(x^+) = \frac{1}{p}\int_{0}^{p}\left[f(t+\lambda) - f(x^+)\right]\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda$$

Si llamamos: $g(\lambda) = \dfrac{f(t+\lambda) - f(x^+)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}$, y tomamos el límite $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda - \frac{1}{2}f(x^+) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{0}^{p} g(\lambda)\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right) d\lambda$$

Por el LEMA DE RIEMANN LEBESGUE, la límite es cero, es decir:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)} d\lambda = \frac{1}{2}f(x^+) \quad \cdots\cdots(\circ)$$

Análogamente, se puede demostrar:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{0} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda=\frac{1}{2}f(x^-)\quad\cdots\cdots(\infty)$$

Por otro lado:

$$\lim_{k\to\infty}S_k(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p}\int_{-p}^{0} f(t+\lambda)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}\omega_0\lambda\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}\lambda\right)}d\lambda$$

$$=\qquad\frac{1}{2}f(x^+)\qquad+\qquad\frac{1}{2}f(x^-)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}S_k(t)=\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}}\quad \text{L.q.q.d.}$$

**NOTA:**

1) Si $t\in Dom(f)$, talque $f$ es continua en $t \Rightarrow f(t^+)=f(t^-)$

2) Si $t$ es un punto de continuidad de $f$ ,entonces: $\lim_{k\to\infty}S_k(t)=f(t^+)=f(t^-)=f(t)$

3) Si $t_0$ es un punto de discontinuidad de $f$ , entonces $\lim_{k\to\infty}S_k(t_0)=\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}=f(t_0)$



## FUNCIONES PARES E IMPARES Y PROPIEDADES

**Definición:**
Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , diremos que:

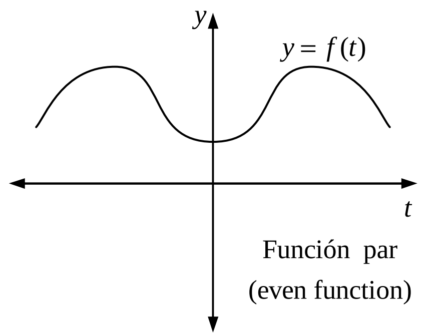
$f$ es una función par $\Leftrightarrow$ $f(-t)=f(t)$ $\quad\forall\, t\in Dom(f)$

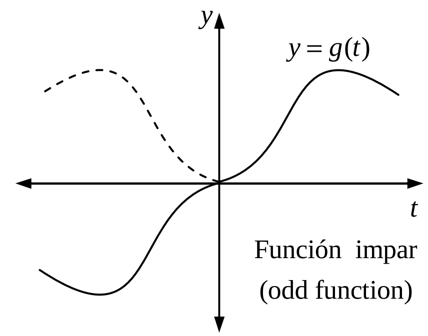
$f$ es una función impar $\Leftrightarrow$ $f(-t)=-f(t)$ $\quad\forall\, t\in Dom(f)$

Ejemplo:

- $f_1(t)=t^2$, $\quad f_2(t)=\cos(t)$ son funciones pares
- $g_1(t)=\frac{1}{t}$, $\quad g_2(t)=\operatorname{sen}(t)$ son funciones impares

Gráficamente:




**OBSERVACIÓN:**
Gráficamente una función par, es **simétrica** respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función impar es **antisimétrica** respecto del eje vertical en el origen:

**PROPOSICIÓN (propiedades de las funciones pares e impares)**
Sean $f$ y $g$ funciones reales de variable real ( $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ )

a) Si $f$ y $g$ son funciones pares $\Rightarrow$ $f\cdot g$ es una función par
b) Si $f$ y $g$ son funciones impares $\Rightarrow$ $f\cdot g$ es una función par
c) Si $f$ es una función par y $g$ es una función impar $\Rightarrow$ $f\cdot g$ es una función impar
d) Toda función, puede expresarse como la suma de dos funciones componentes, de las cuales una es una función par y la otra impar.
e) Si $f$ es una función par, se cumple $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{0}^{a} f(t)\,dt=2\int_{-a}^{0} f(t)\,dt$
f) Si $f$ es una función impar, se cumple $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0$

***Demostración:***

a) Si $f$ y $g$ son funciones pares $\Rightarrow$ $f(-t)=f(t)$ y $g(-t)=g(t)$

$\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=f(-t)\cdot g(-t)=f(t)\cdot g(t)=(f\cdot g)(t)$ $\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=(f\cdot g)(t)$

Por lo tanto, $f\cdot g$ es una función par

b) Si $f$ y $g$ son funciones impares $\Rightarrow$ $f(-t)=-f(t)$ y $g(-t)=-g(t)$

$\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=f(-t)\cdot g(-t)=\left(-f(t)\right)\cdot\left(-g(t)\right)=f(t)\cdot g(t)=(f\cdot g)(t)$

$\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=(f\cdot g)(t)$

Por lo tanto, $f\cdot g$ es una función par

c) Si $f$ es una función par $\Rightarrow$ $f(-t)=f(t)$

$g$ es funciones impar $\Rightarrow$ $g(-t)=-g(t)$

$\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=f(-t)\cdot g(-t)=f(t)\cdot\left(-g(t)\right)=-\left(f(t)\cdot g(t)\right)=-(f\cdot g)(t)$

$\Rightarrow$ $(f\cdot g)(-t)=-(f\cdot g)(t)$

Por lo tanto, $f\cdot g$ es una función impar

d) Si $f$ es una función cualquiera, lo podemos expresar como:

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]+\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$$

Llamamos: $f_e(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$ y $f_o(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$

Probaremos que $f_e$ es una función par y $f_o$ es una función impar

En efecto:

$$f_e(-t)=\frac{1}{2}\left[f(-t)+f(-(-t))\right]=\frac{1}{2}\left[f(-t)+f(t)\right]=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]=f_e(t)$$

$$f_o(-t)=\frac{1}{2}\left[f(-t)-f(-(-t))\right]=\frac{1}{2}\left[f(-t)-f(t)\right]=-\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]=-f_o(t)$$

Entonces: $\boxed{f(t)=f_e(t)+f_o(t)}$ L.q.q.d.

e) Si $f$ es una función par $\Rightarrow$ $f(-t)=f(t)$

Por propiedad de la integral: $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{-a}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{a} f(t)\,dt \qquad \cdots(\lozenge)$

Por otro lado, haciendo, el cambio de variable. $\boxed{t=-u}$, $\Rightarrow$ $dt=-du$

Además $t=0$ $\Rightarrow$ $u=0$ ; $t=-a$ $\Rightarrow$ $u=a$ , considerando que la función $f$ es par, tenemos:

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_{a}^{0} f(-u)\left(-du\right)=-\int_{a}^{0} f(-u)\,du=-\int_{a}^{0} f(u)\,du=\int_{0}^{a} f(u)\,du=\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$



Reemplazando en $(\lozenge)$ , tenemos:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(t)\,dt+\int_{0}^{a} f(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{0}^{a} f(t)\,dt}$$ L.q.q.d.

Análogamente se demuestra que:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=2\int_{-a}^{0} f(t)\,dt$$

f) Si $f$ es una función impar $\Rightarrow$ $f(-t)=-f(t)$

Por propiedad de la integral: $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{-a}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{a} f(t)\,dt \qquad \cdots(\lozenge\lozenge)$

Por otro lado, haciendo, el cambio de variable. $\boxed{t=-u}$, $\Rightarrow$ $dt=-du$ ,

Además $t=0$ $\Rightarrow$ $u=0$ y $t=-a$ $\Rightarrow$ $u=a$

Considerando que la función $f$ es impar, tenemos:

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt=\int_{a}^{0} f(-u)\left(-du\right)=-\int_{a}^{0}\left(-f(u)\right)du=\int_{a}^{0} f(u)\,du=-\int_{0}^{a} f(u)\,du=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

Reemplazando en $(\lozenge\lozenge)$ , tenemos:

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(t)\,dt-\int_{0}^{a} f(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,dt=0}$$ L.q.q.d.

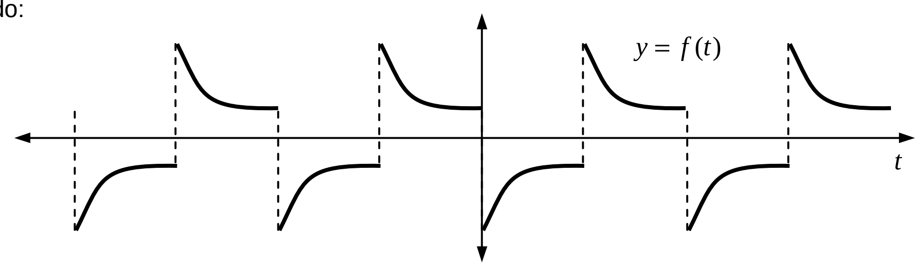
## SIMETRÍA DE MEDIA ONDA

Una función $f(t)$ periódica de periodo $T=2p$ se dice simétrica de media onda, si cumple la propiedad :

$$f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$$

Lo que es lo mismo: $f(t)=-f\left(t+p\right)$

Es decir, si en su gráfica las partes negativas son un reflejo de las positivas pero desplazadas medio periodo:



**OBSERVACIÓN:**
En la gráfica de una función con simetría de media se tiene que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva desplazado horizontalmente medio periodo.

**NOTA:** La simetría de media onda no es par ni impar.

**PROPOSICIÓN**

Si una función $f(t)$ periódica de periodo $T = 2p$ tiene simetría de media onda. Demostrar que:

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

***Demostración:***

Como $f(t)$ es periódica de periodo $T = 2p$, entonces: $f\left(t - \frac{T}{2}\right) = f\left(t - \frac{T}{2} + T\right) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$

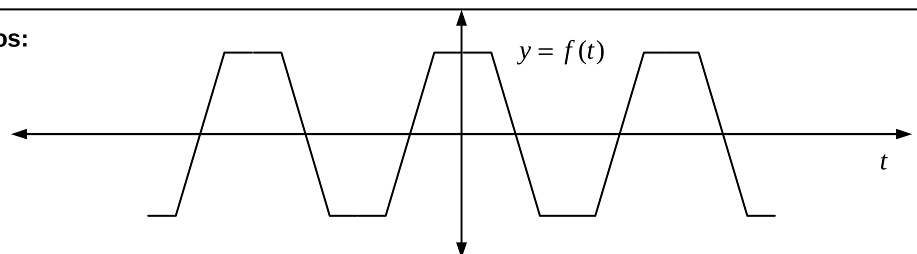
Además $f(t)$ tiene simetría de media onda y reemplazando lo anterior, se tiene:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \text{L.q.q.d.}$$

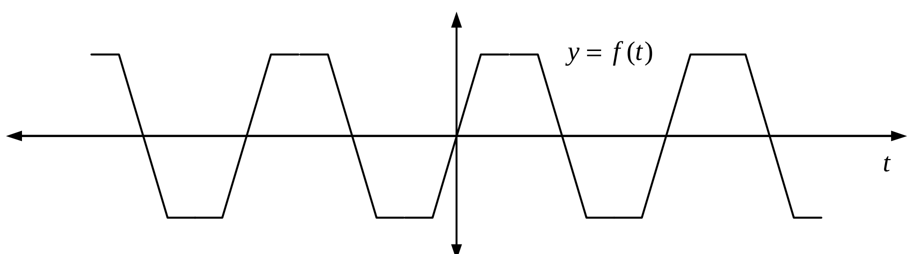
**SIMETRIA DE CUARTO DE ONDA**

Si una función periódica $f(t)$ tiene simetría de media onda y además es una función par o impar, entonces se dice que $f(t)$ tiene una simetría de cuarto de onda par ó impar.

**Ejemplos:**




Simetría de un cuarto de onda par




Simetría de un cuarto de onda impar

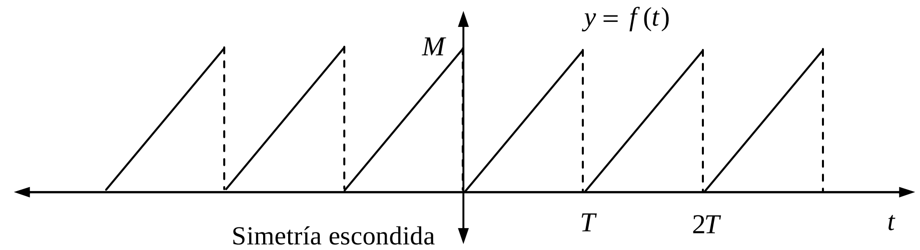


**SIMETRIA ESCONDIDA**

Con frecuencia la simetría de una función periódica no es evidente debido a la presencia de un término constante.

**Por ejemplo:**

Sea la función $f$ periódica de periodo $T = 2p$, dado por el gráfico:




Simetría escondida

Se construye una nueva función $g(t) = f(t) - \frac{M}{2}$, donde la nueva función es impar: