UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

SERIES DE FOURIER

Lic. Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

2010

1

GENERACIÓN DE FUNCIONES SENO Y COSENO

Resolver: $y''+\lambda^2 y=0$ $\quad$ $y(p)=y(-p)$, $\quad y'(p)=y'(-p)$

Solución:
NOTA: No se puede resolver por la transformada de Laplace, pues tiene condiciones de frontera

Resolviendo por el método clásico:

Como $y''+\lambda^2 y=0 \Rightarrow r^2+\lambda^2=0 \Rightarrow \quad r=\pm\lambda i$

$$\boxed{y_G(x)=A\cos\lambda x+B\operatorname{sen}\lambda x}$$

Si $\boxed{y(p)=y(-p)} \Rightarrow A\cos(\lambda p)+B\operatorname{sen}(\lambda p)=A\cos(-\lambda p)+B\operatorname{sen}(-\lambda p)$

$\Rightarrow \cancel{A\cos(\lambda p)}+B\operatorname{sen}(\lambda p)=\cancel{A\cos(\lambda p)}-B\operatorname{sen}(\lambda p) \Rightarrow \boxed{2B\operatorname{sen}(\lambda p)=0}\cdots(I)$

Como: $y'_G(x)=-A\lambda\operatorname{sen}\lambda x+B\lambda\cos\lambda x$

Si $\boxed{y'(p)=y'(-p)} \Rightarrow -A\lambda\operatorname{sen}(\lambda p)+B\lambda\cos(\lambda p)=-A\lambda\operatorname{sen}(-\lambda p)+B\lambda\cos(-\lambda p)$

$\Rightarrow -A\lambda\operatorname{sen}(\lambda p)+\cancel{B\lambda\cos(\lambda p)}=A\lambda\operatorname{sen}(\lambda p)+\cancel{B\lambda\cos(\lambda p)} \Rightarrow \boxed{2A\lambda\operatorname{sen}(\lambda p)=0}\cdots(II)$

De (I) y (II) podemos afirmar que: $\operatorname{sen}(\lambda p)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda p=n\pi \quad , \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=\frac{n\pi}{p} \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}$$

Luego, las soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea dada es:

$$y(x)=A\cos\frac{n\pi}{p}x+B\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}$$

Más adelante veremos que el siguiente conjunto de funciones, constituirá una base del espacio vectorial de las de funciones periódicas, de periodo $T=2p$.

$$\left\{\ 1,\ \cos\frac{\pi}{p}x,\ \cos\frac{2\pi}{p}x,\ \cos\frac{3\pi}{p}x,\cdots,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x,\cdots\ \right\}$$

FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función Periódica $f(t)$ se cumple la siguiente propiedad para todo valor de t.

$$f(t) = f(t+T)$$

A la constante mínima T, para la cual se cumple lo anterior se le llama el periodo de la función.

Se cumple que:

$$f(t) = f(t+nT), \text{ donde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Ejemplo 1:

¿Cuál periodo de la función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$?

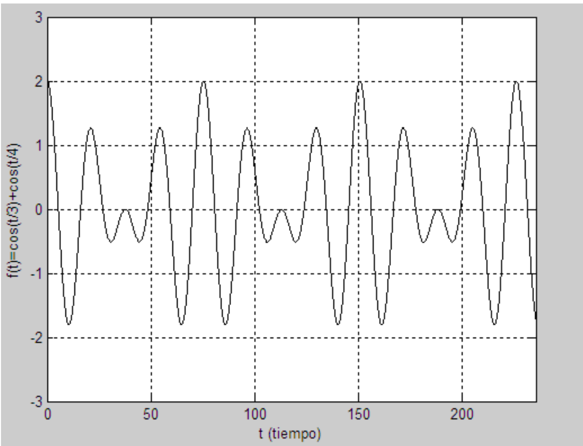
Solución.- Si $f(t)$ es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T) = \cos\left(\frac{t+T}{3}\right) + \cos\left(\frac{t+T}{4}\right) = f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

Pero como se sabe que: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, para cualquier entero k, entonces para que se cumpla la igualdad se requiere que: $\frac{T}{3} = 2k_1\pi$, $\frac{T}{4} = 2k_2\pi$

Es decir, $T = 6k_1\pi = 8k_2\pi$ Tomar el $m.c.m.(6,8) = 24$

donde: k_1 y k_2 son enteros, el valor mínimo de T, es decir con $k_1 = 4$ y $k_2 = 3$, es decir, $T = 24\pi$



PLOTEANDO EN MATLAP

```
x = 0:pi/1000:75*pi;
fx = cos(x/3)+cos(x/4);
plot(x,fx,'k-');
xlabel('t (tiempo)');
ylabel('f(t)=cos(t/3)+cos(t/4)');
grid on;
axis([min(x) max(x) -3 3]);
```

Ejemplo 2:

Hallar el periodo de la función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right) + \cos\left(\frac{t}{5}\right)$

Solución.- Si $f(t)$ es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T) = \cos\left(\frac{t+T}{3}\right) + \cos\left(\frac{t+T}{4}\right) + \cos\left(\frac{t+T}{5}\right) = f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right) + + \cos\left(\frac{t}{5}\right)$$

Pero como se sabe que: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, para cualquier entero k, entonces para que se cumpla la igualdad se requiere que:

$$\frac{T}{3} = 2k_1\pi, \quad \frac{T}{4} = 2k_2\pi \quad , \quad \frac{T}{5} = 2k_3\pi$$

Es decir, $T = 6k_1\pi = 8k_2\pi = 10k_3\pi$ Tomar el $m.c.m.(6,8,10) = 120$

donde: k_1, k_2 y k_3 son enteros para que sea valor mínimo de T, es decir con $k_1 = 20$ y $k_2 = 15$, $k_5 = 10$ es decir, $T = 120\pi$

Ejercicio:

Demostrar que la función constante $f(t) = \text{costante}$, es una función periódica de periodo T para cualquier valor positivo T.

OBSERVACIÓN

Podríamos pensar que cualquier suma de funciones seno y coseno produce una función periódica, esto no es así, por ejemplo, consideremos la función $f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$.

Para que sea periódica se requiere encontrar dos enteros m, n tales que:

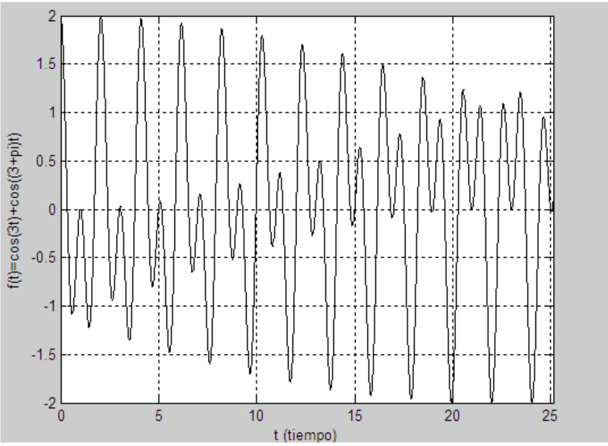
$$\omega_1 T = 2\pi m, \qquad \omega_2 T = 2\pi n \qquad \text{de donde: } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

Es decir, la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ debe ser un <u>**número racional**</u>

Ejemplo 3:

La función $\cos(3t)+\cos(\pi+3)t$

No es periódica, ya que $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{3}{3+\pi}$ **no es un número racional**.



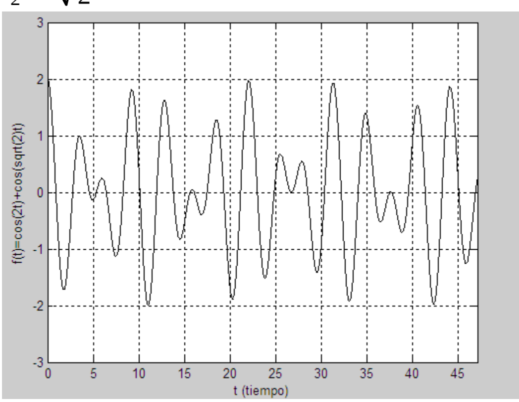
PLOTEANDO EN MATLAP

```
x = 0:pi/1000:8*pi;
fx = cos(3*x)+cos((3+pi)*x);
plot(x,fx,'k-');
xlabel('t (tiempo)');
ylabel('f(t)=cos(3t)+cos((3+pi)t)');
grid on;
axis([min(x) max(x) -2 2]);
```

Ejemplo 4:

La función $\cos(2t)+\cos(\sqrt{2}\,t)$,

No es periódica, ya que $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **no es un número racional**.



PLOTEANDO EN MATLAP

```
x = 0:pi/1000:15*pi;
fx = cos(2*x)+cos(sqrt(2)*x);
plot(x,fx,'k-');
xlabel('t (tiempo)');
ylabel('f(t)=cos(2t)+cos(sqrt(2)t)');
grid on;
axis([min(x) max(x) -3 3]);
```

PROPOSICION

1. La linealidad de la periodicidad

Es decir:

Si f y g son periódicas, entonces $af+bg$, a y b constantes, es también periódica

En particular:

Si f y g son periódicas con periodo T , entonces $af+bg$, a y b constantes, es también periódica con periodo T .

2. Si se tienen funciones periódicas del mismo periodo, entonces el producto es periódica del mismo periodo

Es decir:

Si f y g son periódicas con periodo T , entonces $f\cdot g$, es también periódica con periodo T .

PROPOSICIÓN:

Si $f(t)$ es una función periódica con periodo $T=2p$, entonces se cumple:

a) $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+2p}^{\beta+2p} f(t)dt$

b) $\int_0^a f(t)\,dt = \int_{2p}^{2p+a} f(t)\,dt \qquad \forall \quad a \in \mathbb{R}$

c) $\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_a^{a+2p} f(t)dt \qquad \forall \quad a \in \mathbb{R}$

d) Si $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt$

Se cumple que: $g(t)$ es periódica de periodo $T=2p \iff \int_{-p}^{p} f(t)dt = 0$

e) Si $F(t) = \int_0^t f(t)dt - \dfrac{a_0\, t}{2}$, donde $a_0 = \dfrac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt$

Entonces: $F(t)$ es periódica, de periodo $2p$.

Demostración

a) Haciendo cambio de variable: $u = t+2p \Rightarrow t = u-2p$

Además si : $du = dt$, $\begin{cases} t=\alpha \Rightarrow u=\alpha+2p \\ t=\beta \Rightarrow u=\beta+2p \end{cases}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int_{\alpha+2p}^{\beta+2p} f(u-2p)\,du$$

$= \int_{\alpha+2p}^{\beta+2p} f(u)\,du$ pues $f(u-2p)=f(u)$, f es de periodo $T=2p$

$= \int_{\alpha+2p}^{\beta+2p} f(t)\,dt$ cambiamos la variable $u=t$

Por lo tanto: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha+2p}^{\beta+2p} f(t)dt$ Lq.q.d.

b) De la parte a) , tomando $\alpha=0$ y $\beta=a$ Verifica: $\int_0^a f(t)dt = \int_{2p}^{a+2p} f(t)dt$ L.q.q.d.

c) Sea $a\in\mathbb{R}$, Tenemos: $\int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{a-p}^{-p} f(t)dt + \int_{-p}^{a+p} f(t)dt$

Aplicando la parte a) en: $\int_{a-p}^{-p} f(t)dt = \int_{(a-p)+2p}^{(-p)+2p} f(t)dt = \int_{a+p}^{p} f(t)dt$

Reemplazando $\int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{a+p}^{p} f(t)dt + \int_{-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{-p}^{a+p} f(t)\,dt + \int_{a+p}^{p} f(t)\,dt$

En consecuencia:: $\int_{a-p}^{a+p} f(t)dt = \int_{-p}^{p} f(t)\,dt$ L.q.q.d.

Además de lo anterior, hacemos : $a = a+p$

$$\Rightarrow \int_{-p}^{p} f(t)\,dt = \int_{(a+p)-p}^{(a+p)+p} f(t)dt = \int_a^{a+2p} f(t)dt$$

d) Podemos expresar:

$g(t+2p) = \int_0^{t+2p} f(t+2p)\,d(t+2p)$

$= \int_0^{t+2p} f(t)\,dt$,pues: f es de periodo $T=2p$; $d(t+2p)=dt$

$= \int_0^{2p} f(t)\,dt + \int_{2p}^{t+2p} f(t)\,dt$ como: $\int_0^{2p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\,dt$

$= \int_{-p}^{p} f(t)\,dt + \int_0^t f(t)\,dt$: $\int_{2p}^{2p+t} f(t)\,dt = \int_0^t f(t)\,dt$

$= \int_{-p}^{p} f(t)\,dt + g(t)$

Por lo tanto: $\boxed{g(t+2p) = \int_{-p}^{p} f(t)\,dt + g(t)} \cdots (I)$

En consecuencia:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si suponemos que: $g(t)$ es periódica, de periodo $T=2p$

Es decir, $g(t+2p)=g(t)$

De (I) tenemos $\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si suponemos que: $\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0$

De (I) tenemos: $g(t+2p)=g(t)$

$\Rightarrow$ $g(t)$ es periódica, de periodo $T=2p$

e) Como: $a_0 = \dfrac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt \Rightarrow p\,a_0 = \int_{-p}^{p} f(t)dt$

$F(t+2p) = \int_0^{t+2p} f(t+2p)d(t+2p) - \dfrac{a_0\,(t+2p)}{2}$

$= \int_0^{t+2p} f(t)dt - \dfrac{a_0 t}{2} - a_0 p = \int_0^{2p} f(t)dt + \int_{2p}^{t+2p} f(t)dt - \dfrac{a_0 t}{2} - a_0 p$

$= \int_{-p}^{p} f(t)dt + \int_0^t f(t)dt - \dfrac{a_0 t}{2} - a_0 p = a_0 p + \int_0^t f(t)dt - \dfrac{a_0 t}{2} - a_0 p$

$= \int_0^t f(t)dt - \dfrac{a_0 t}{2}$

$= F(t)$

Entonces: $F(t+2p) = F(t)$

En consecuencia $F(t)$ es una función periódica de periodo $T=2p$

SERIE DE FOURIER

Una *serie de Fourier* es una serie infinita que converge puntualmente a una función continua y periódica. Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinitesimal de funciones senoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés ***Jean-Baptiste Joseph Fourier*** que desarrolló la teoría cuando estudiaba ***la ecuación del calor***. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicando sus resultados iniciales en **1807** y **1811**. Esta área de investigación se llama algunas veces ***Análisis armónico***.

Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, además de ser una herramienta sumamente útil en la teoría matemática abstracta. Áreas de aplicación incluyen análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, y compresión de datos. En ingeniería, para el caso de los sistemas de telecomunicaciones, y a través del uso de los componentes espectrales de frecuencia de una señal dada, se puede optimizar el diseño de un sistema para la señal portadora del mismo. Refiérase al uso de un analizador de espectros.

En el cálculo infinitesimal, los vectores en el espacio de dos y tres dimensiones, y sabe que dos vectores no cero son ortogonales cuando su producto punto, o producto interno, es cero. Al dejar ese nivel, las nociones de vectores, ortogonalidad y producto interno pierden, con frecuencia, su interpretación geométrica. Estos conceptos se han generalizado es muy común imaginar que una función es un vector. En consecuencia, podemos decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero. En este caso, veremos que el producto interno de los vectores es una integral definida.

Otro concepto que se vio en cálculo infinitesimal fue el desarrollo de una función f como serie infinita de potencias de x - a, llamada serie de potencias. En este capítulo aprenderemos a desarrollar una función f en términos de un conjunto infinito de funciones ortogonales.

INTRODUCCIÓN

Recordando que en un espacio vectorial E, la función bidimensional

$$(\cdot) : \ E\times E \to \mathbb{R}$$
$$(u,v)\mapsto (u\cdot v)$$

Se dice que es un producto interno o producto punto, si cumple los siguientes axiomas:

i) $(u\cdot v) = (v\cdot u)$

ii) $(k\,u\cdot v) = k\,(u\cdot v)$, donde k es un escalar

iii) $u = 0 \iff (u\cdot u) = 0$, además $u \neq 0 \iff (u\cdot u) > 0$

iv) $((u+v)\cdot w) = (u\cdot w) + (v\cdot w)$

Por otro lado

Si $u, v \in E$ **Diremos que:** u, v son ortogonales en $E \iff (u\cdot v) = 0$

También se induce la norma, definida como la norma del vector $u \in E$, y lo denotamos por: $\|\cdot\|$, lo definimos por : $\| u \|^2 = (u\cdot u)$

Ejemplo:

El conjunto $E = \{ f:[a,b]\to\mathbb{R} \ / \ \text{f es una función continua} \}$

Con las operaciones $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $(a\cdot f)(x) = a\ f(x)$

Es un espacio vectorial que se denota por $(E, +, \cdot)$

PROPOSICIÓN 1

Dos funciones f_1 y f_2 es un elemento del espacio E

$(f_1\cdot f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx$ es un **producto interno (punto)** del espacio E .

Por lo tanto, dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en un intervalo [a, b] si

$$(f_1\cdot f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx = 0$$

Ejemplo 1:

Las funciones f_1 (x) = x^2 y f_2 (x) = x^3 son ortogonales en el intervalo [-1, 1] porque

$$(f_1\cdot f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 x^3\,dx = \int_{-1}^{1} x^5\,dx = \left(\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1} = 0$$

Ejemplo 2:

Determine el valor de a de modo que las funciones $f(x) = a\,x^2+2$ y $g(x) = x+1$ son ortogonales en el dominio $I = [0, 2]$.

Solución:

De la definición podemos:

$$\int_0^2 f(x)g(x)\,dx = 0 \ \Rightarrow \ \int_0^2 (a\,x^2+2)(x+1)dx = 0 \ \Rightarrow \ \int_0^2 (a\,x^3 + a\,x^2 + 2x + 2)\,dx = 0$$

$$\left(a\,\frac{x^4}{4} + a\,\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 2x\right|_0^2 = 0 \ \Rightarrow \ a\,\frac{(2)^4}{4} + a\,\frac{(2)^3}{3} + 2\frac{(2)^2}{2} + 2(2) = 0$$

$$\Rightarrow \ 4a + \frac{8}{3}a + 4 + 4 = 0 \ \Rightarrow a + \frac{2}{3}a = -2 \ \Rightarrow \frac{5}{3}a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{6}{5}}$$

Definición Conjuntos de funciones ortogonales

Un conjunto de funciones son ortogonales en el intervalo [a, b] , si son **ortogonales dos a dos** en el intervalo [a, b].

Ejemplo 3:

Determine los valores a, b, c para los cuales $f(x) = ax+2$, $g(x) = bx^2 + cx + 1$ y $h(x) = x-1$ son mutuamente ortogonales con $0 \le x \le 1$.

Solución:
Por definición

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0 \quad , \qquad \int_0^1 f(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 g(x)h(x)\,dx = 0$$

De acuerdo a cada caso:

1. $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$

$$\int_0^1 (ax+2)(bx^2+cx+1)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (abx^3 + acx^2 + ax + 2bx^2 + 2cx + 2)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \left(ab\frac{x^4}{4} + ac\frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} + 2b\frac{x^3}{3} + 2c\frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ab}{4} + \frac{ac}{3} + \frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3ab + 4ac + 6a + 8b + 12c + 24 = 0} \cdots (I)$$

2. $\int_0^1 f(x)h(x)\,dx = 0$

$$\int_0^1 (ax+2)(x-1)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^1 (ax^2 + 2x - ax - 2)\,dx = 0 \;\Rightarrow \left(a\frac{x^3}{3} + x^2 - a\frac{x^2}{2} - 2x \right)\Bigg|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{3} + 1 - \frac{a}{2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -6} \cdots (II)$$

3. $\int_0^1 g(x)h(x)\,dx = 0$

$$\int_0^1 (bx^2 + cx + 1)(x-1)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (bx^3 + cx^2 + x - bx^2 - cx - 1)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \left(b\frac{x^4}{4} + c\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - b\frac{x^3}{3} - c\frac{x^2}{2} - x \right)\Bigg|_0^1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{1}{2} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2} - 1 = 0$$

$$3b + 4c - 4b - 6c = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b + 2c = -6} \cdots (III)$$

Por otro lado, de (I) y (II), reemplazando:

$$3(-6)b + 4(-6)c + 6(-6) + 8b + 12c + 24 = 0 \Rightarrow -18b - 24c - 36 + 8b + 12c + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{5b + 6c = -6} \cdots (IV)$$

De (III) y (IV), resolviendo:

$$b + 2c = -6 \;\overset{(\times 5)}{\Rightarrow}\; 5b + 10c = -30$$

$$5b + 6c = -6 \;\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\; -5b - 6c = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -6}$$

Sumando m.a.m. $\quad 4c = -24$

Reemplazando en (III)

$$b + 2c = -6 \;\Rightarrow\; b + 2(-6) = -6 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

En consecuencia:

El conjunto $\left\{ -6x+2,\ 6x^2 - 6x + 1,\ x-1 \right\}$ **son funciones ortogonales en el dominio** $0 \le x \le 1$.

Definición: LA NORMA DE LA FUNCIÓN

La norma de la función f en un intervalo [a, b] y lo denotamos por: $\|\cdot\|$, lo definimos por :

$$\| f(x) \|^2 = (f \cdot f)$$

NOTA: Como, $(f \cdot f) = \int_a^b f^2(x)\,dx$, en consecuencia: $\| f(x) \| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2}$

Definición: FUNCIONES ORTONORMAL

Dos funciones f_1 y f_2 son **ortonormales** en un intervalo [a, b], si

a) f_1 y f_2 son ortogonales

b) $\| f_1(x) \| = 1$ y $\| f_2(x) \| = 1$

NOTA: (CONSTRUCCIÓN DE UN CONJUNTO DE FUNCIONES ORTONORMALES)

Dado el Conjunto de funciones $\{ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \}$ son ortogonales en $a \le x \le b$,
Entonces, si tomamos

$$\phi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\| f_1(x) \|} \quad , \qquad \phi_2(x) = \frac{f_2(x)}{\| f_2(x) \|} \text{ y } \quad \phi_3(x) = \frac{f_3(x)}{\| f_3(x) \|}$$

Al conjunto $\{ \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \phi_3(x) \}$ es llamado el conjunto ortonormal de las funciones $f_1, f_2\ y\ f_3$.

RECORDANDO EL ALGEBRA:

En un espacio vectorial E , el subconjunto $B=\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}\subset E$ es una **base ortogonal**, Si

a) B es un conjunto linealmente independiente:

b) Si $e_i,\ e_j$ son ortogonales $\forall\ \ i\neq j$

Además:

Todo elemento $v\in E$, se puede escribir:

$v=\ \lambda_1\ e_1+\ \lambda_2\ e_2+\ \lambda_3\ e_3+\ \lambda_4\ e_4+\cdots$ donde $e_i\in B \qquad i=1,2,3,\cdots$

El conjunto:

$$E=\{\ f:[-p,\ p]\to\mathbb{R}\ /\ \text{f es una función continua}\ \}$$

Con las operaciones $\quad (f+g)(t)=f(t)+g(t) \qquad (a\cdot f)(t)=a\ f(t)$ es claro que es un espacio vectorial que se denota por $(E,\ +,\ \cdot)$,

PROPOSICIÓN:

Sea el conjunto:

$$B=\left\{\ 1,\ \cos\frac{\pi}{p}t,\ \cos\frac{2\pi}{p}t,\ \cos\frac{3\pi}{p}t,\cdots,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}t,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}t,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}t,\cdots\ \right\}$$

Entonces:

a) Cada elemento de B es periódica, de periodo $T=2p$

b) B es una base cuyos elementos son mutuamente ortogonales de E .

Demostración: Se tiene:

a) La función constante $f(t)=1$ es periódica, en particular de periodo $T=2p$.

Por otro lado:

$$\cos\frac{n\pi}{p}(t+T)=\cos\frac{n\pi}{p}(t+2p)=\cos\left(\frac{n\pi}{p}t+2n\pi\right)=\cos\frac{n\pi}{p}t$$

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}(t+T)=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}(t+2p)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t+2n\pi\right)=\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t$$

b) Es fácil ver que B es una base de E **(Ejercicio)**

Veamos que son mutuamente ortogonales: Sea $\boxed{\omega_0=\frac{\pi}{p}}$

i) Si $f(t)=1$ y $g(t)=\cos n\omega_0\,t$

$$\int_{-p}^{p}f(t)g(t)\,dt=\int_{-p}^{p}1\cos n\omega_0\,t\,dt=\int_{-p}^{p}\cos n\omega_0\,t\,dt=0 \quad \forall\ n\neq 0$$

j) Si $f(t)=1$ y $g(t)=\operatorname{sen}\,m\omega_0\,t$

$$\int_{-p}^{p}f(t)g(t)\,dt=\int_{-p}^{p}1\operatorname{sen}\,m\omega_0\,t\,dt=\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\,m\omega_0\,t\,dt=0 \qquad \forall\ m$$

k) Si $f(t)=\operatorname{sen}\,m\omega_0\,t$ y $g(t)=\cos n\omega_0\,t$

$$\int_{-p}^{p}f(t)g(t)\,dt=\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}(m\omega_0\,t)\cos(n\omega_0\,t)\,dt=0 \quad \forall m,n$$

l) Si $f(t)=\operatorname{sen}\,m\omega_0\,t$ y $g(t)=\operatorname{sen}\,n\omega_0\,t$

$$\int_{-p}^{p}f(t)g(t)\,dt=\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}(m\omega_0\,t)\operatorname{sen}(n\omega_0\,t)\,dt=0 \quad \forall\ m\neq n$$

m) Si $f(t)=\cos\,m\omega_0\,t$ y $g(t)=\cos\,n\omega_0\,t$

$$\int_{-p}^{p}f(t)g(t)\,dt=\int_{-p}^{p}\cos(m\omega_0\,t)\cos(n\omega_0\,t)\,dt=0 \quad \forall\ m\neq n$$

OBSERVACIÓN:

a) $\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}^2(m\omega_0\,t)\,dt=p$

b) $\int_{-p}^{p}\cos^2(m\omega_0\,t)\,dt=p$

Recordar:

$$\int_a^b\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\,2x\Big|_a^b$$

$$\int_a^b\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\,2x\Big|_a^b$$

La función $f \in E$ periódica de periodo $T = 2p$ es siempre posible expresar como combinación lineal de los elemento de la base

$$B = \left\{ 1,\ \cos\frac{\pi}{p}t,\ \cos\frac{2\pi}{p}t,\ \cos\frac{3\pi}{p}t, \cdots,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}t,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}t,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}t, \cdots \right\}$$

Es decir:

$$f(t) = c_0 + a_1 \cos\frac{\pi}{p}t + a_2 \cos\frac{2\pi}{p}t + a_3 \cos\frac{3\pi}{p}t + \cdots + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}t + a_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}t + a_3 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}t + \cdots$$

Expresando utilizando sumatoria, se tiene:

$$\boxed{f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t \right)}$$

La expresión anteriormente dada es denominada, **la Serie de Fourier**.

Si llamamos $\boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{p}}$, podemos representar a la Serie de Fourier como:

$$\boxed{f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \right)}$$

CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER
(Coeficientes de Euler)

$$\boxed{f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \right)} \cdots (I)$$

<u>Calculando</u> c_0

Integrando la sumatoria en el intervalo $[-p, p]$

$$\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = c_0 \int_{-p}^{p} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-p}^{p} \cos n\omega_0 t\,dt + b_n \int_{-p}^{p} \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt \right)$$

$$= c_0\ t \Big|_{-p}^{p} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos n\omega_0 t\,dt}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-p}^{p} \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt}_{=0} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 2p\,c_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt} \cdots (\alpha)$$

<u>Calculando</u> a_n

Expresando (I) como: $\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j \cos j\omega_0 t \right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t \right)} \cdots (II)$

Multiplicando por $\cos n\omega_0 t$ **a** (II)

$$f(t)\cos n\omega_0 t = \frac{a_0}{2}\cos n\omega_0 t + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j \cos j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t \right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t \right)$$

$$= \frac{a_0}{2}\cos n\omega_0 t + \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_j \cos j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t \right) + a_n \cos^2 n\omega_0 t$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty}\left(a_j \cos j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t \right) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t \right)$$

Integrando la sumatoria en el intervalo $[-p, p]$

$$\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = c_0 \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos n\omega_0 t\,dx}_{=0} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_j \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t\ dx}_{=0} \right)$$

$$+ a_n \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos^2 n\omega_0 t\ dt}_{p} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\left(a_j \underbrace{\int_{-p}^{p} \cos j\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt}_{=0} \right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\left(\underbrace{\int_{-p}^{p} b_j \operatorname{sen} j\omega_0 t\ \cos n\omega_0 t\,dt}_{=0} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = a_n\ p$$

En consecuencia: $\boxed{a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt} \cdots (\beta) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

Analogamente: $\boxed{b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt} \cdots (\gamma)$

RESUMIENDO: Los coeficientes de Fourier

De $(\alpha), (\beta)$ **y** (γ)**, los coeficientes de Fourier son:**

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\ b_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\,dt \end{aligned}}$$

OBSERVACIÓN:

1) En (β), los a_n están definidos desde $n = 1, 2, 3, \cdots$
   Si tomamos $n = 0$, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(0\,\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos(0)\,dt = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt$$

Luego: $\boxed{a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt}$

Por (α) $c_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{2}a_0$

Es decir: $\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2}}$

Po eso es muy frecuente ver a la Serie de Fourier escrita como:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\right)} \qquad \text{donde: } \omega_0 = \frac{\pi}{p}$$

NOTA:

1) La ortogonalidad de las funciones seno y coseno ($\cos n\omega_0 t$ y $\mathrm{sen}\,n\omega_0 t$) no sólo se da en el intervalo $[-p,\ p] = [-\pi, \pi]$, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo: de a a $a + 2p$, con a arbitrario, con el mismo resultado.

2) Para expresarse como serie de Fourier $f(t)$, no necesita estar centrada en el origen. Simplemente debemos tomar el intervalo, donde está definida, como el periodo de la serie.

Es decir: los coeficientes de Fourier se pueden hallar como:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = \frac{1}{p}\int_{a}^{a+2p} f(t)\,dt = \frac{1}{p}\int_{0}^{2p} f(t)\,dt = \frac{1}{p}\int_{2p} f(t)\,dt \\ a_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{1}{p}\int_{a}^{a+2p} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \cdots = \frac{1}{p}\int_{2p} f(t)\cos(n\,\omega_0\,t)\,dt \\ b_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\,dt = \frac{1}{p}\int_{a}^{a+2p} f(t)\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\,dt = \cdots = \frac{1}{p}\int_{2p} f(t)\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0\,t)\,dt \end{aligned}}$$

donde: $\omega_0 = \frac{\pi}{p}$, y funciones periódicas de periodo $T = 2p$

OBSERVACIÓN:

Algunas funciones periódicas $f(t)$ de periodo $T = 2p$ pueden expresarse por la siguiente serie, llamada Serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(\omega_0 t) + \cdots + b_1 sen(\omega_0 t) + b_2\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \cdots$$

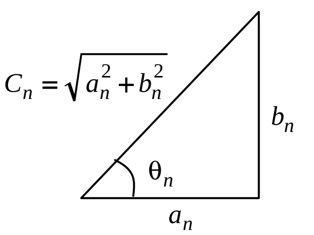
Donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{p}$

Es decir: $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\,\omega_0 t) + b_n\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0 t)\right]$

Es posible escribir de una manera ligeramente diferente de la Serie de Fourier, si observamos que el término $a_n\cos(n\,\omega_0 t) + b_n\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0 t)$ se puede escribir como:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\,\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\mathrm{sen}(n\,\omega_0 t)\right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:



$$\cos(\theta_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \qquad \mathrm{sen}(\theta_n) = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Lo cual, la expresión queda :

$$C_n\left(\cos(\theta_n)\cos(n\,\omega_0 t) + \mathrm{sen}(\theta_n)\,\mathrm{sen}(n\,\omega_0 t)\right) = C_n\cos(n\,\omega_0 t - \theta_n)$$

Si además definimos $C_0 = \frac{a_0}{2}$, la serie de Fourier se puede escribir como

$$\boxed{f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)}$$

Donde: $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $\theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Componentes y Armónicas

Así, una función periódica $f(t)$ se puede escribir como la suma de **componentes sinusoidales** de diferentes frecuencias $\omega_n = n\omega_0$

A la componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$: $C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$ se le llama la **enésima armónica de** $f(t)$.

A la primera armónica $(n=1)$ se le llama la **componente fundamental** y su periodo es el mismo que el de $f(t)$.

A la frecuencia $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ se le llama **frecuencia angular fundamental.**

A la componente de frecuencia cero C_0, se le **llama componente de corriente directa (cd)** y corresponde al valor promedio de $f(t)$ en cada periodo.

Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n son respectivamente las **amplitudes** y los **ángulos de fase** de las armónicas.

Ejemplo:

La función $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$

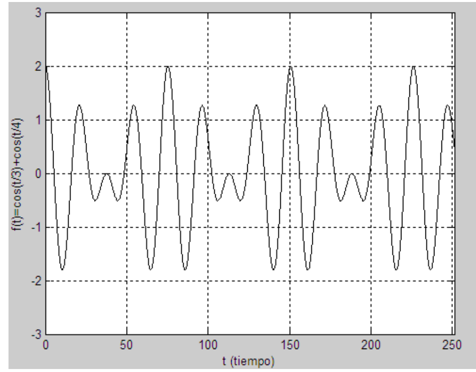
Se puede demostrar que tiene periódo $T = 24\pi$, por lo tanto su **frecuencia fundamental** es

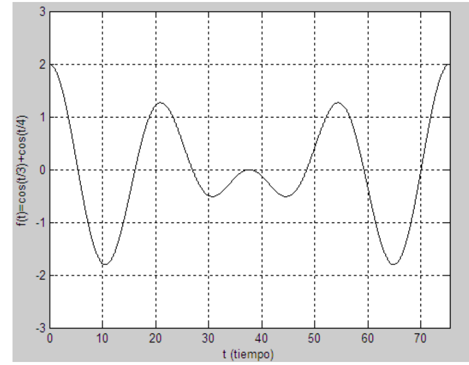
$\omega_0 = \frac{1}{12} rad/seg.$

Componente fundamental es de la forma $0 * \cos\left(\frac{t}{12}\right)$

Tercer armónico: $\cos\left(\frac{3t}{12}\right) = \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ **Cuarto armónico**: $\cos\left(\frac{4t}{12}\right) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$

GRAFICANDO EN MATLAB





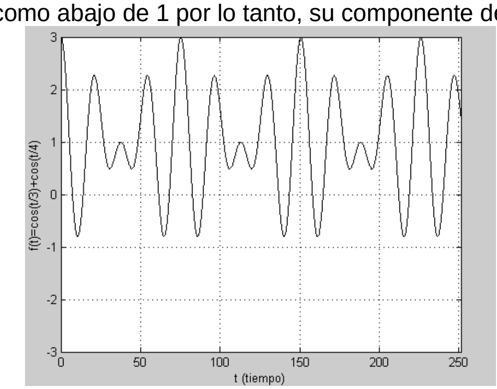

```
% Crear un archivo m-file llamado plotear.m
% Ploteando la función f(t)=f(x/3)+f(x/4)

x = 0:pi/1000:80*pi;
fx = cos(x/3)+cos(x/4);
plot(x,fx,'k-');
xlabel('t (tiempo)');
ylabel('f(t)=cos(t/3)+cos(t/4)');
grid on;
axis([min(x) max(x) -3 3]);
```

Ejemplo:
Como puede verse, la función anterior tiene tantas partes positivas como negativas, por lo tanto su componente **de corriente directa cd** es cero, en cambio.

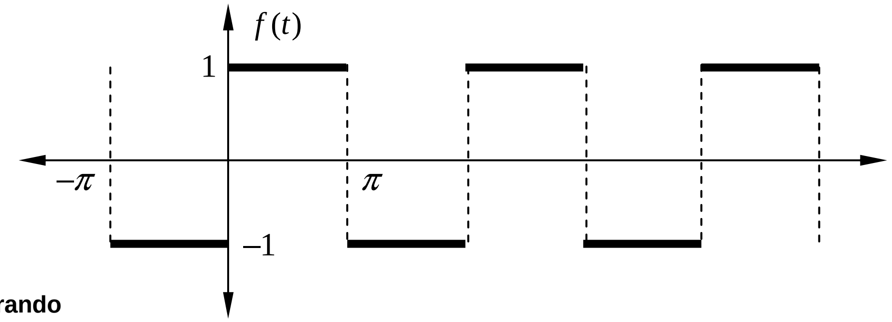
$$f(t) = 1 + \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

Tiene tantas partes arriba como abajo de 1 por lo tanto, su componente de cd es 1.



Ejemplo 1: Expresar en series de Fourier, la función de salto

$$f(t)=\begin{cases}-1 & -\pi \le t < 0\\ 1 & 0 \le t \le \pi\end{cases}$$



Considerando

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)$$

Calculando los coeficientes de Fourier. $T=2\pi$ $\quad p=\pi$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)\,dt+\int_0^{\pi} f(t)\,dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt+\int_0^{\pi}(1)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-t\Big|_{-\pi}^{0}+t\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\pi+\pi\right)=0$$ En consecuencia: $\boxed{a_0=0}$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{n\pi}{\pi}t\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\cos nt\,dt+\int_0^{\pi}\cos nt\,dt\right)=0$$

En consecuencia: $\boxed{a_n=0}$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{\pi}t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} nt\,dt+\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nt\,dt\right)$$

$$\Rightarrow \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}+\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) \qquad \cos n\pi=(-1)^n \qquad \begin{matrix} par=1\\ impar=-1\end{matrix}$$

Por lo tanto: $$b_n=\begin{cases}0 & Si\ n \text{ es par}\\ \dfrac{4}{n\pi} & Si\ n \text{ es impar}\end{cases}$$

Por lo tanto, la función $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)$, se tiene el siguiente resultado:

$$\boxed{f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r-1}\operatorname{sen}((2r-1)t)}$$

Definición

La N-ésima suma parcial correspondiente a la serie de Fourier, de periodo $T=2p$

$$\boxed{S_N(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right)}$$ Donde $\omega_0=\dfrac{\pi}{p}$

Ejemplo:

Del ejemplo anterior, de la función de salto lo podemos escribir, la suma parcial

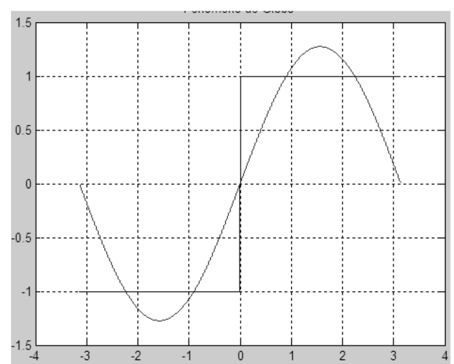
De acuerdo a sus coeficientes, escribimos: $\boxed{S_{2n-1}(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{r=1}^{2n-1}\frac{1}{2r-1}\operatorname{sen}((2r-1)t)}$

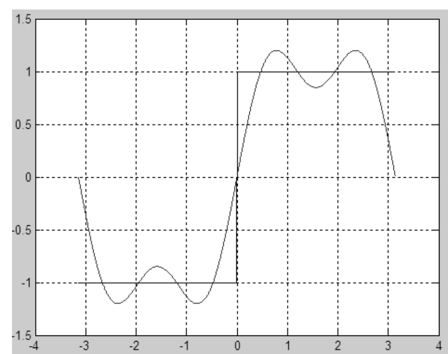
Desenvolviendo la sumatoria:

$$S_{2n-1}(t)=\frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(t)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5t)+\frac{1}{7}\operatorname{sen}(7t)+\cdots+\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}((2n-1)t)\right]$$

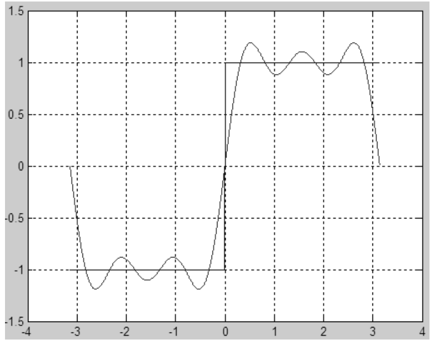
Las gráficas de las sumas parciales son:

$$S_1(t)=\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(t) \qquad\qquad S_3(t)=\frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen}(t)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)\right]$$

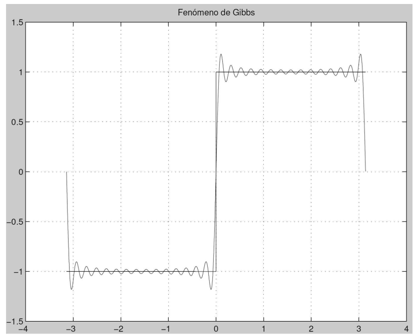




$$S_5(t) = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen }(t) + \frac{1}{3}\text{sen }(3t) + \frac{1}{5}\text{sen }(5t)\right]$$



$$S_{29}(t) = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen }(t) + \frac{1}{3}\text{sen }(3t) + \frac{1}{5}\text{sen }(5t) + \frac{1}{7}\text{sen }(7t) + \cdots + \frac{1}{2n-1}\text{sen}(29t)\right]$$



Con el siguiente programa en Matlab , se pueden dibujar las gráficas de las sumas parciales de Fourier para la función salto.

5.1. Programa: sumpar.m

```
function sumpar(n)
% Sumas parciales de Fourier de la función salto
% f(x)= -1 si -pi<x<0
% 1 si 0<x<pi
% n es el n'umero de sumandos
% Funci'on salto
x = -pi:0.001:pi;
f=-1*(x<0)+1*(x>0);
% sumas parciales de Fourier
s = zeros(size(x)); for k=1:n
s=s+((1-(-1)^k)/k)*sin(k*x);
end
s = 2/pi*s;
% gráfica de las sumas parciales y de la funci'on salto
plot(x, s, 'r', x, f, 'b'),grid;
title('Fenómeno de Gibbs');
% Fin del programa sumpar.m
```

Una vez guardado con el nombre sumpar.m, para activarlo, basta con escribir, por ejemplo, >>sumpar(1) , >>sumpar(3) y >>sumpar(5) y >>sumpar(29) obtendremos la gráfica de las sumas parciales de Fourier.

FENÓMENO DE GIBBS EN SERIES DE FOURIER

Se puede demostrar que:

Si f y f' son continuas, salvo en un número finito de puntos de discontinuidades de tipo salto, las sumas parciales de Fourier convergen puntualmente a f(x) en los puntos de continuidad de f y a la media de los límites laterales en los puntos de discontinuidad (para una demostración.

Este resultado se aplica al caso particular de la función salto que estamos considerando y que presenta una singularidad en x = 0: una discontinuidad de tipo salto. En la figura de sumpar(29) apreciamos la forma en la que, efectivamente, cuando $x \neq 0$, las series de Fourier aproximan el valor de la función en x, mientras que en x = 0 convergen a la media de los límites laterales, nula en este caso puesto que $\left[f(0^-) + f(0^+) \right]/2 = (1-1)/2 = 0$.

En este punto de discontinuidad $x = 0$ se aprecia también con claridad el fenómeno de Gibbs. En efecto, se observa claramente que la gráfica de la suma parcial de Fourier excede a la de la función salto en el punto de discontinuidad. Por ejemplo, a la derecha del punto x = 0 se ve cómo la gráfica de la suma parcial de Fourier supera con nitidez a la de la función salto. La gráfica de la sumpar(29), donde este hecho se pone de manifiesto, se ha conseguido haciendo primero >>sumpar(29), para generar la gráfica completa y después, con el comando >>zoom, que permite seleccionar una zona de la gráfica, con el ratón, para ampliarla. En la figura de sumpar(5), se puede observar cómo las gráficas de las sumas parciales sobresalen por debajo de la gráfica de f(x), en las proximidades del punto $(0,-1)$.

En la figura >>sumpar(29) de observamos que el fenómeno de Gibbs también se produce en los extremos $x = \pm\pi$ del intervalo $(-\pi, \pi)$. Esto es debido a que la suma parcial de Fourier aproxima a la extensión periódica de período 2π de la función salto, que presenta discontinuidades en los puntos de la forma, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.