



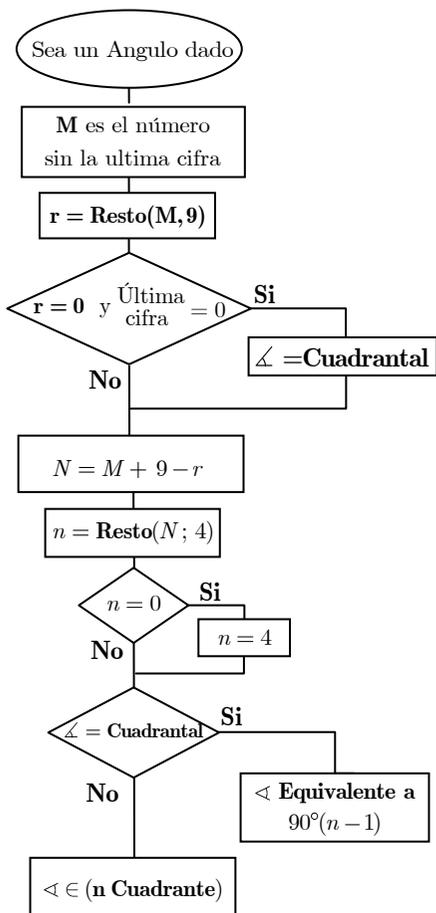
TRIGONOMETRIA

Prof.: Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

TEORÍA III

CALCULAR EL CUADRANTE AL QUE PERTENECE UN ÁNGULO POSITIVO

Ejemplos:



a) $m\angle = 2340^\circ$

$$M = 234$$

$$r = \text{Resto}(234, 9)$$

Navasesh: $2 + 3 + 4 = 9$

Caso particular, se considera: $r = 0$

$$\boxed{r=0} \Rightarrow 9 - 0 = 9$$

Como la última cifras es cero y $r = 0$

El ángulo es un **ángulo Cuadrantal**

$$N = 234 + 9 \Rightarrow \boxed{N = 243}$$

$$n = \text{Resto}(243; 4)$$

Criterio de divisibilidad:

$$43 = \overset{4}{4} + 3 \Rightarrow \boxed{n=3}$$

$$\angle \text{ Equivalente a : } 90^\circ(3 - 1) = 180^\circ$$

b) $m\angle = 1657^\circ$

$$M = 165$$

$$r = \text{Resto}(165, 9)$$

Navasesh: $1 + 6 + 5 = 12 \Rightarrow 1 + 2 = 3$

$$\boxed{r=3} \Rightarrow 9 - 3 = 6$$

$$N = 165 + 6 \Rightarrow \boxed{N = 171}$$

$$n = \text{Resto}(171; 4)$$

Criterio de divisibilidad:

$$71 = \overset{4}{4} + 3 \Rightarrow \boxed{n=3}$$

$$m\angle = 1657^\circ \in IIIQ$$

Ejercicios:

- a) 2340° b) 2340°
 c) 87341° d) 123456°

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE DE ÁNGULOS POSITIVOS
Ejemplo: $\text{Tan}(1234^\circ) = ?$
Paso N° 1

Determinar el cuadrante donde se encuentra el ángulo.

$$1234^\circ \in \text{IIQ}$$

Paso N° 2

 Calcular el Resto de dividir entre 9 el **ángulo sin la última cifra.**
1ra forma: $r = \text{Resto}(123, 9)$

 Criterio de divisibilidad con 9 \Rightarrow $r = 6$
2da. forma: Navasesh (suma de dígitos) del ángulo sin la última cifra (si resulta un 9, colocar el 0).

$$1 + 2 + 3 = 6$$

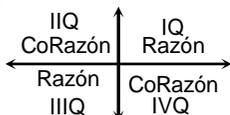
Paso N° 3

Colocar la última cifra al lado derecho del resultado anterior, formando el ángulo equivalente.

$$r = 6 \quad \text{y Última cifra} = 4$$

 El ángulo a considerar es el $\theta = 64^\circ$
Paso N° 4

Determinar el signo de la Razón trigonométrica y la Razón o Co-razón trigonométrica que se utilizará según el cuadrante en que se encuentre. (Ver el gráfico)



$$\text{Tan}(1234^\circ) = -\text{Cotan}(64^\circ)$$

Nota:

Siempre se debe recordar la Co-razón de ángulos complementarios-.

$$\text{Cotan}(64^\circ) = \text{tan}(26^\circ)$$

 Por lo tanto: $\text{Tan}(1234^\circ) = -\text{Tan}(26^\circ)$
CALCULAR EL CUADRANTE AL QUE PERTENECE UN ÁNGULO NEGATIVOS

El procedimiento es el siguiente:

 Primero se determina el cuadrante en que se encuentra el ángulo positivo, para luego aplicar **“Lo que le sobra a 5 de ...”**
Ejemplo:

Calcular en que cuadrante se encuentran los siguientes números:

a) -85634°

$$85634 \in \text{IVQ}$$

 “Lo que le sobra a 5 de 4”: $5 - 4 = 1$

$$\therefore -85634 \in \text{IQ}$$

b) -12345678°

$$12345678 \in \text{IIIQ}$$

 “Lo que le sobra a 5 de 3”: $5 - 3 = 2$

$$\therefore -12345678 \in \text{IQ}$$

TIPOS DE FUNCIONES
FUNCIONES PARES

$$\text{F.T.}(-\alpha) = \text{F.T.}(\alpha)$$

FUNCIONES IMPARES

$$\text{F.T.}(-\alpha) = -\text{F.T.}(\alpha)$$

Observación:

- * Las gráficas de las funciones pares son **simétricas reflexivas respecto al eje “Y”**.
- * Las gráficas de las funciones impares son **simétricas rotacionales de 180° con respecto del origen**

R.T DE ÁNGULOS NEGATIVOS

Func. Trig. PARES	$\text{Sen}(-\alpha) = -\text{Sen } \alpha$
	$\text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos } \alpha$
	$\text{Tg}(-\alpha) = -\text{Tg } \alpha$
	$\text{Ctg}(-\alpha) = -\text{Ctg } \alpha$
	$\text{Sec}(-\alpha) = \text{Sec } \alpha$
	$\text{Csc}(-\alpha) = -\text{Csc } \alpha$



EJERCICIOS DEMOSTRATIVOS

1. Reducir:

$$P = \text{Sen}35^\circ \cdot \text{Csc}215^\circ \cdot \text{Csc}240^\circ$$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

2. Calcular:

$$M = \text{Sen}40^\circ + \text{Cos}20^\circ + \text{Sen}220^\circ + \text{Sen}200^\circ$$

a) 0 b) -1 c) 2

d) 1 e) -2

3. Calcular:

$$E = \text{Sen}120^\circ \cdot \text{Tg}240^\circ + \text{Sen}390^\circ$$

a) -2 b) 2 c) -1

d) 1 e) 0

4. Calcular:

$$\frac{\text{Sen}310^\circ \text{Sec}225^\circ \text{Cos}300^\circ}{\text{Tg}315^\circ \text{Cos}140^\circ \text{Sen}150^\circ}$$

a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$

d) -1 e) $-\sqrt{3}$

5. Hallar el valor de la expresión:

$$E = \frac{\text{Tg}465^\circ - \text{Ctg}825^\circ}{\text{Sen}735^\circ \cdot \text{Cos}375^\circ}$$

a) $-8\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}/2$ c) $-4\sqrt{3}$

d) $-2\sqrt{3}$ e) $-\sqrt{3}/4$

6. Calcular:

$$E = \frac{\text{Sen}(-59347^\circ) + \text{Tan}(-122175^\circ)}{\text{Cos}(-532943^\circ)}$$

a) $-\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$

d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{4}{5}$

7. Calcular:

$$E = \text{Csc}(-1114410^\circ) + \text{tg}(-1217520^\circ)$$

a) -2 b) -2 c) 1

d) $\frac{1}{2}$ e) 3

R.T. DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$$\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Cos}\alpha \text{Sen}\beta$$

$$\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha \text{Sen}\beta$$

$$\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta$$

$$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta$$

$$\text{Tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Tg}\alpha + \text{Tg}\beta}{1 - \text{Tg}\alpha \text{Tg}\beta}$$

$$\text{Tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{Tg}\alpha - \text{Tg}\beta}{1 + \text{Tg}\alpha \text{Tg}\beta}$$

$$\text{Ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Ctg}\alpha \text{Ctg}\beta - 1}{\text{Ctg}\beta + \text{Ctg}\alpha}$$

$$\text{Ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{Ctg}\alpha \text{Ctg}\beta + 1}{\text{Ctg}\beta - \text{Ctg}\alpha}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\text{Sen}(\alpha + \theta) \text{Sen}(\alpha - \theta) = \text{Sen}^2 \alpha - \text{Sen}^2 \theta$$

$$\text{Cos}(\alpha + \theta) \text{Cos}(\alpha - \theta) = \text{Cos}^2 \alpha - \text{Sen}^2 \theta$$

$$\text{Tg}\alpha + \text{Tg}\theta = \frac{\text{Sen}(\alpha + \theta)}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\theta}$$

$$\text{Tg}\alpha - \text{Tg}\theta = \frac{\text{Sen}(\alpha - \theta)}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\theta}$$

$$\text{Ctg}\alpha + \text{Ctg}\theta = \frac{\text{Sen}(\alpha + \theta)}{\text{Sen}\alpha \text{Sen}\theta}$$

$$\text{Ctg}\alpha - \text{Ctg}\theta = \frac{\text{Sen}(\theta - \alpha)}{\text{Sen}\alpha \text{Sen}\theta}$$

$$\text{Tg}(\alpha + \theta) = \text{Tg}\alpha + \text{Tg}\theta + \text{Tg}\alpha \text{Tg}\theta \text{Tg}(\alpha + \theta)$$

$$\text{Tg}(\alpha - \theta) = \text{Tg}\alpha - \text{Tg}\theta - \text{Tg}\alpha \text{Tg}\theta \text{Tg}(\alpha - \theta)$$

$$\frac{\text{Sen}(\alpha + \beta)}{\text{Sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\text{Tg}\alpha + \text{Tg}\beta}{\text{Tg}\alpha - \text{Tg}\beta}$$

$$\text{Tg}\alpha + \text{Ctg}\theta = \frac{\text{Cos}(\beta - \alpha)}{\text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\alpha}$$

$$1 \pm \text{Tg}\alpha \cdot \text{Ctg}\theta = \frac{\text{Cos}(\alpha \mp \beta)}{\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\beta}$$

$$\text{Tg}(\alpha + \theta) = \frac{\text{Sen}^2\alpha - \text{Sen}^2\theta}{\text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\alpha - \text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta}$$

FORMA COMBINADA ENTRE SENO Y COSENO

$$a\text{Sen}\alpha + b\text{Cos}\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \text{Sen}(\alpha + \phi)$$

$$\text{Dónde: } \text{Tg}\phi = \frac{b}{a}$$

RecordarXY

Si $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \phi \in \text{IC} \quad (+)(+)$

Si $a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \phi \in \text{IIC} \quad (-)(+)$

Si $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \phi \in \text{IIIC} \quad (-)(-)$

Si $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \phi \in \text{IVC} \quad (+)(-)$

EXTENSIONES (MAX. Y MÍN)

De la forma combinada entre seno y coseno, se pueden deducir las siguientes extensiones.

I) Si: "a" y "b" $\in \mathbb{Z}^+$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\text{Sen}\alpha \pm b\text{Cos}\alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

II) Forma general si: $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \text{Sen}^{2n}\alpha + \text{Cos}^{2n}\alpha \leq 1$$

III) Si: "n", "m" $\in \mathbb{Z}^+$, tal que al menos uno de ellos es impar.

$$-\sqrt{\frac{n^n \cdot m^m}{(n+m)^{n+m}}} \leq \text{Sen}^n x \text{Cos}^m x \leq \sqrt{\frac{n^n \cdot m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

IV) Si "n" y "m" son pares positivos

$$0 \leq \text{Sen}^n x \text{Cos}^m x \leq \sqrt{\frac{n^n \cdot m^m}{(n+m)^{n+m}}}$$

RELACIONES NATURALES FRECUENTES

$$\text{Sen}\alpha \pm \text{Cos}\alpha = \sqrt{2}\text{Sen}(\alpha \pm 45^\circ)$$

$$\sqrt{3}\text{Sen}\alpha \pm \text{Cos}\alpha = 2\text{Sen}(\alpha \pm 30^\circ)$$

$$\text{Sen}\alpha \pm \sqrt{3}\text{Cos}\alpha = 2\text{Sen}(\alpha \pm 60^\circ)$$

$$3\text{Sen}\alpha \pm 4\text{Cos}\alpha = 5\text{Sen}(\alpha \pm 53^\circ)$$

$$4\text{Sen}\alpha \pm 3\text{Cos}\alpha = 5\text{Sen}(\alpha \pm 37^\circ)$$

$$\frac{1}{2} \leq \text{Sen}^4\alpha + \text{Cos}^4\alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq \text{Sen}^6\alpha + \text{Cos}^6\alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{8} \leq \text{Sen}^8\alpha + \text{Cos}^8\alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{16} \leq \text{Sen}^{10}\alpha + \text{Cos}^{10}\alpha \leq 1$$

