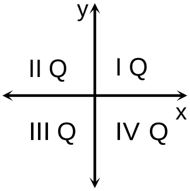
ACADEMIA Y COLEGIO **Uni+ Ingenieros**
...INGENIEROS FORMANDO INGENIEROS

TRIGONOMETRIA

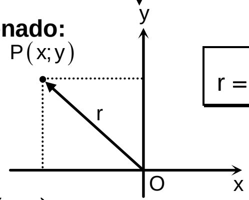
Prof.: Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

TEORÍA II

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

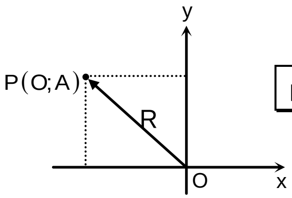


Par ordenado:



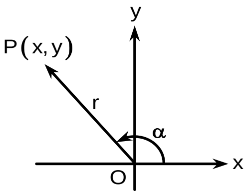
$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Origen: $(0;0)$,
Dirección: del origen al punto
Módulo: la distancia $OP = r$



$$\boxed{R^2 = A^2 + O^2}$$

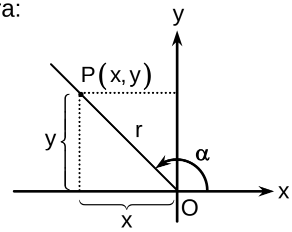
ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL



r : radio vector
$\alpha \in IIQ$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

trigonométricas de "α", de la siguiente manera:



$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ r > 0$$

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}} = \frac{O}{R}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}} = \frac{A}{R}$$

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{O}{A}$$

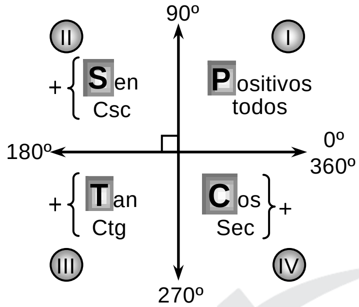
$$\text{Ctg}\,\alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{A}{O}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa}} = \frac{R}{A}$$

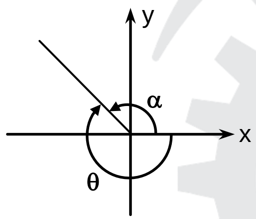
$$\text{Csc}\,\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} = \frac{R}{O}$$

ORA ROA = "ser feliz"

SIGNO DE LA RAZONES TRIGONOMÉTRICA EN LOS CUATRO CUADRANTES



ÁNGULOS COTERMINALES



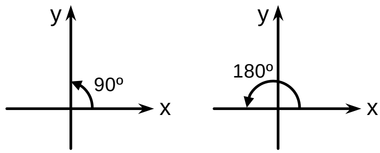
- La diferencia de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas de 360º.

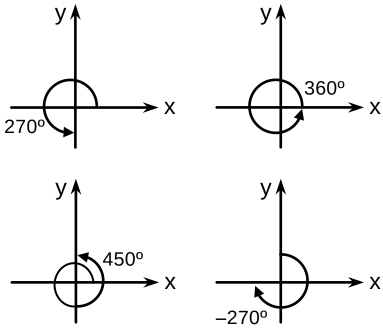
$$\boxed{\theta-\alpha=n(360^{\circ})\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{Z}}$$

- Si dos ángulos α y θ son coterminales sus razones trigonométricas serán iguales.

$$\boxed{R.T.(\alpha)=R.T.(\theta)}$$

ÁNGULOS CUADRANTALES



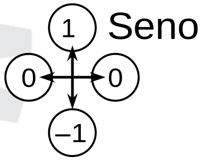


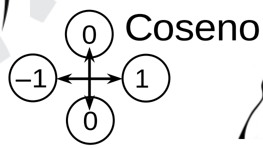
Los ángulos cuadrantales cumplen:

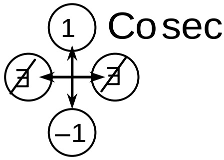
$$\boxed{\measuredangle\ \text{cuadrantal}=90^{\circ}\ n\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{Z}}$$

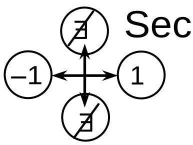
$$\boxed{\measuredangle\ \text{cuadrantal}=\frac{n\pi}{2}\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{Z}}$$

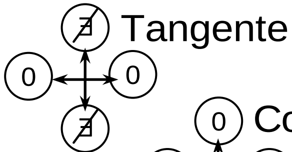
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

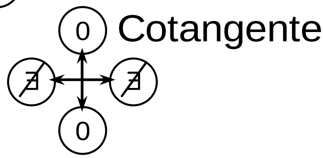












IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- Identidades Pitagóricas
- Identidades por cociente
- Identidades Recíprocas
- Identidades Auxiliares

IDENTIDADES PITAGÓRICAS:

$$\boxed{\operatorname{Sen}^2x+\operatorname{Cos}^2x=1} \quad ; \ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Sen}^2x=1-\operatorname{Cos}^2x\\ \operatorname{Cos}^2x=1-\operatorname{Sen}^2x\end{cases}$$

$$\boxed{1+\operatorname{Tg}^2x=\operatorname{Sec}^2x} \quad ; \ x\neq\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Sec}^2x-\operatorname{Tan}^2x=1\\ \operatorname{Sec}^2x-1=\operatorname{Tan}^2x\end{cases}$$

$$\boxed{1+\operatorname{Ctg}^2x=\operatorname{Csc}^2x} \quad ; \ x\neq\{n\pi\},n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Csc}^2x-\operatorname{Cot}^2x=1\\ \operatorname{Csc}^2x-1=\operatorname{Cot}^2x\end{cases}$$

IDENTIDADES POR COCIENTE:

$$\boxed{\operatorname{Tg}x=\frac{\operatorname{Sen}x}{\operatorname{Cos}x}} \quad ; \ x\neq\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Tg}x=\operatorname{Sen}x\,.\,\operatorname{Sec}x\\ \operatorname{Tg}x=\dfrac{\operatorname{Sec}x}{\operatorname{Csc}x}\end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{Ctg}x=\frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}} \quad ; \ x\neq\{n\pi\},n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}\operatorname{Ctg}x=\operatorname{Cos}x\,.\,\operatorname{Csc}x\\ \operatorname{Ctg}x=\dfrac{\operatorname{Csc}x}{\operatorname{Sec}x}\end{cases}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS:

$$\boxed{\operatorname{Sen}x\,.\,\operatorname{Csc}x=1} \quad ; \ x\neq\{n\pi\},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Sen}x=\frac{1}{\operatorname{Csc}x} \quad ; \quad \operatorname{Csc}x=\frac{1}{\operatorname{Sen}x}$$

$$\boxed{\operatorname{Cos}x\,.\operatorname{Sec}x=1} \quad ; \ x\neq\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Cos}x=\frac{1}{\operatorname{Sec}x} \quad ; \quad \operatorname{Sec}x=\frac{1}{\operatorname{Cos}x}$$

$$\boxed{\operatorname{Tg}x\,.\,\operatorname{Ctg}x=1} ; \quad x\neq\{n\pi\},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Tg}x=\frac{1}{\operatorname{Ctg}x} \quad ; \quad \operatorname{Ctg}x=\frac{1}{\operatorname{Tg}x}$$

IDENTIDADES AUXILIARES:

$$\boxed{\frac{\operatorname{Sen}x}{1\pm\operatorname{Cos}x}=\frac{1\mp\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}}$$

$$\boxed{\operatorname{Sec}x\pm\operatorname{Tg}x=\frac{1}{\operatorname{Sec}x\mp\operatorname{Tg}x}}$$

$$\boxed{\operatorname{Csc}x\pm\operatorname{Ctg}x=\frac{1}{\operatorname{Csc}x\mp\operatorname{Ctg}x}}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}^4x+\operatorname{Cos}^4x=1-2\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}^6x+\operatorname{Cos}^6x=1-3\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x}$$

$$\boxed{\operatorname{Tg}x+\operatorname{Ctg}x=\operatorname{Sec}x\,.\,\operatorname{Csc}x}$$

$$\boxed{\operatorname{Sec}^2x+\operatorname{Csc}^2x=\operatorname{Sec}^2x\operatorname{Csc}^2x}$$

$$\boxed{(1+\operatorname{Sen}x+\operatorname{Cos}x)^2=2(1+\operatorname{Sen}x)(1+\operatorname{Cos}x)}$$

CONDICIONALES:

Si: $\boxed{\operatorname{Sec}x+\operatorname{Tg}x=m} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Sec}x-\operatorname{Tg}x=\frac{1}{m}}$

Si: $\boxed{\operatorname{Csc}x+\operatorname{Ctg}x=m} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Csc}x-\operatorname{Ctg}x=\frac{1}{m}}$

TAMBIÉN SE CUMPLE QUE:

$$\operatorname{Sen}^8x+\operatorname{Cos}^8x=1-4\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x+2\operatorname{Sen}^4x\operatorname{Cos}^4x$$

$$\operatorname{Sen}^{10}x+\operatorname{Cos}^{10}x=1-5\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x+5\operatorname{Sen}^4x\operatorname{Cos}^4x$$

$$\operatorname{Sec}^6x-\operatorname{Tg}^6x=1+3\operatorname{Sec}^2x\operatorname{Tg}^2x$$

$$\operatorname{Csc}^6x-\operatorname{Ctg}^6x=1+3\operatorname{Csc}^2x\operatorname{Ctg}^2x$$

$$\operatorname{Sec}^8x+\operatorname{Tg}^8x=1+4\operatorname{Sec}^2x\operatorname{Tg}^2x+2\operatorname{Sec}^4x\operatorname{Tg}^4x$$

$$\operatorname{Csc}^8x+\operatorname{Ctg}^8x=1+4\operatorname{Csc}^2x\operatorname{Tg}^2x+2\operatorname{Csc}^4x\operatorname{Ctg}^4x$$

RECOMENDACIONES:

- ✓ Se recomienda expresar en función de senos y cosenos.
- ✓ Recordar productos notables se utilizan frecuentemente.
- ✓ Para problemas condicionados, se debe resolver a partir del dato condicionante.

TIPOS DE FUNCIONES

FUNCIONES PARES

$$\boxed{F.T.(-\alpha) = F.T.(\alpha)}$$

FUNCIONES IMPARES

$$\boxed{F.T.(-\alpha) = -F.T.(\alpha)}$$

Observación:

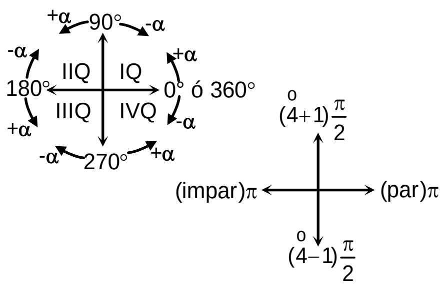
* Las gráficas de las funciones pares son **simétricas reflexivas respecto al eje "Y".**
* Las gráficas de las funciones impares son **simetrías rotacionales de 180° con respecto del origen**.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\mathrm{Sen}(-\alpha) = -\mathrm{Sen}\,\alpha$$
$$\mathrm{Cos}(-\alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$\mathrm{Tg}(-\alpha) = -\mathrm{Tg}\,\alpha$$
$$\mathrm{Ctg}(-\alpha) = -\mathrm{Ctg}\,\alpha$$
$$\mathrm{Sec}(-\alpha) = \mathrm{Sec}\,\alpha$$
$$\mathrm{Csc}(-\alpha) = -\mathrm{Csc}\,\alpha$$

Func. Trig. PARES

REDUCCIÓN DE ÁNGULOS POSITIVOS MENORES QUE 360°



$$\mathrm{RazónT}(\mathrm{EjeAbs.}\pm\alpha) = \pm\mathrm{RazónT}(\alpha)$$
$$\mathrm{RazónT}(\mathrm{EjeOrd.}\pm\alpha) = \pm\mathrm{CORazónT}(\alpha)$$

* Si el ángulo cuadrantal es 90° ó 270° la razón trigonométrica equivalente es su co-razón.

* Si el ángulo cuadrantal es 180° ó 360° la razón trigonométrica equivalente es la misma.

$$R.T.(180° \pm \alpha) = \pm R.T.(\alpha)$$
$$R.T.(360° - \alpha) = \pm R.T.(\alpha)$$
$$R.T.(90° \pm \alpha) = \pm CO\,R.T.(\alpha)$$
$$R.T.(270° \pm \alpha) = \pm CO\,R.T.(\alpha)$$

Ejemplo:

* $\mathrm{Sec}\,300° = \mathrm{Sec}(270° + 30°)$

$$\mathrm{Sec}(\underbrace{270° + 30°}_{\text{Cuarto cuadrante}}) = \overset{\text{signo}}{+}\mathrm{Csc}\,30° = +2$$

El signo será positivo, esto porque en el cuarto cuadrante secante es positivo.

ÁNGULOS MAYORES QUE 360°

$$\boxed{R.T.(n \times 360° \pm \alpha) = R.T. \pm (\alpha)\ ;\ n \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{R.T.(n \times 2\pi \pm \alpha) = R.T. \pm (\alpha)\ ;\ n \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo:

* $\mathrm{Sec}(1657°)$

$$\begin{array}{r|l} 1657° & 360° \\ \hline 1440° & 4 \text{ vueltas} \\ \hline 217° & \end{array}$$

Trabajamos con el resto

$$\mathrm{Sec}(1657°) = \mathrm{Sec}(217°) = -\mathrm{Sec}\,37° = -\frac{5}{4}$$