ACADEMIA Y COLEGIO
Uni+ Ingenieros
...INGENIEROS FORMANDO INGENIEROS

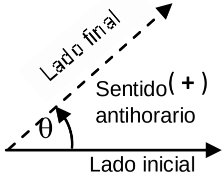
TRIGONOMETRIA

Prof.: Guillermo Mario Chuquipoma Pacheco

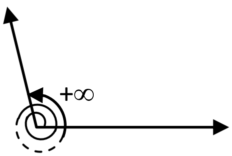
TEORÍA I

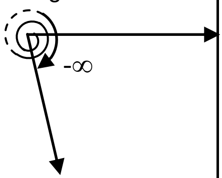
Ángulo trigonométrico:

El ángulo trigonométrico es la figura generada sobre un plano por la rotación de un rayo alrededor de su origen, desde una posición inicial hasta una posición final y en un sentido determinado (horario (-) o antihorario (+))

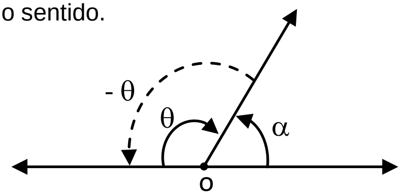


La medida de los ángulos trigonométricos no se encuentra sujetos a restricciones, pudiendo ser de cualquier magnitud





Para realizar operaciones con ángulos trigonométricos, estos deberán estar en el mismo sentido.

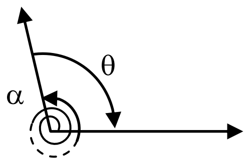


Ángulos Coterminales:

Se denomina ángulos coterminales, a aquellos ángulos que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final diferenciándolos solamente un número entero de vueltas es decir:

Si α, θ son ***coterminales*** entonces:

$\alpha - \theta = n$ (vueltas)



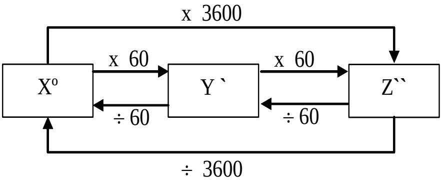
SISTEMAS DE MEDIDA ÁNGULAR

Para medir ángulos trigonométricos existen una infinidad de sistemas, debido a que la unidad angular de medida se puede considerar de manera arbitraria consideramos convencionalmente los siguientes sistemas:

Sistema sexagesimal o ingles (S)

Tiene como unidad de medida el grado sexagesimal (1º) el cual es igual a $\frac{1}{360}$ del

1 VUELTA = 360º
1º = 60`
1`= 60``
1º = 3600``
Conversión



Sistema centesimal o francés (C)
Tiene como unidad de medida el grado centesimal (1^g) el cual es igual a $\frac{1}{400}$ del ángulo de una vuelta es decir:

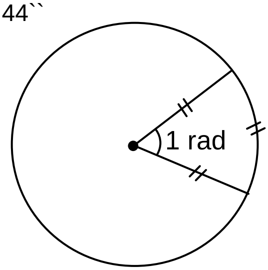
1 VUELTA = 400^g
$1^g = 100^m$
$1^m = 100^s$
$1^g = 10\,000^s$

$$\overline{ab,\ cd\ ef}^{\,g} <> \overline{ab}^{\,g}\ \overline{cd}^{\,m}\ \overline{ef}^{\,s}$$

grados minutos segundos

Sistema radial o circular (R)
La unidad de medida en este sistema es el radián (1 rad), el cual se define en toda circunferencia como la medida del arco cuya longitud es igual a la longitud de su radio.

Observaciones
1 rad <> 57º 17` 44``
1rad >1º > 1^g



Aproximaciones

$\pi = 3.1416$

$\pi = \frac{22}{7}$

$\pi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

CONVERSIONES

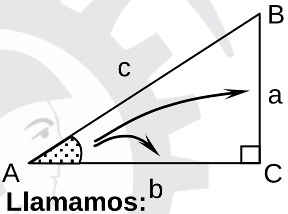
$$\frac{S}{360} = \frac{C}{400} = \frac{R}{2\pi} = K \Rightarrow \frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k$$

$$\begin{cases} S = 180k \\ C = 200K \\ R = \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10K \\ R = \dfrac{\pi k}{20} \end{cases}$$

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \quad \text{ó} \quad \frac{m}{27} = \frac{n}{50} \quad \text{ó} \quad \frac{p}{81} = \frac{q}{250}$$

RAZONES TRIGONOMÉTICAS

Sea:
Teorema de Pitagoras



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Llamamos:
a: cateto opuesto del ángulo A
b: cateto adyacente del ángulo A
c: hipotenusa

Definimos:

$$\text{Sen}\,A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos}\,A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tg}\,A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cos}\,A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Sec}\,A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Csc}\,A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

VALORES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{Sen}A\\ \operatorname{Cos}A\end{matrix}\right\}<1 \qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{Tan}A\\ \operatorname{Cot}A\end{matrix}\right\}\in\mathbb{R} \qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{Sec}A\\ \operatorname{Csc}A\end{matrix}\right\}>1$$

RAZÒN	$\leftrightarrow$	**RECÍPROCA**
Seno	$\leftrightarrow$	Cosecante
Coseno	$\leftrightarrow$	Cosecante
Tangente	$\leftrightarrow$	Cotangente

Propiedad

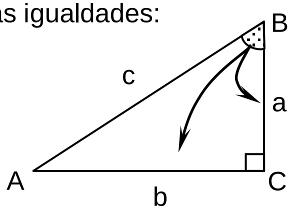
"*El producto de dos razones recíprocas es siempre la unidad*"

$$\boxed{\begin{matrix}\operatorname{Sen}A\cdot\operatorname{Csc}A=1\\ \operatorname{Cos}A\cdot\operatorname{Sec}A=1\\ \operatorname{Tag}A\cdot\operatorname{Ctg}A=1\end{matrix}}$$

$$\boxed{\operatorname{Razon}(A)\times\operatorname{Reciproca}(B)=1 \iff A=B}$$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Al definir las razones trigonométricas, hemos considerado a uno de los ángulos agudos, pero también se puede tomar las razones trigonométricas del otro ángulo o sea de su complemento y como se trata de los mismos lados encontramos algunas igualdades:



Ángulos complementarios

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}=90^{\circ}}$$

$$\operatorname{Sen}B=\frac{b}{c}=\operatorname{Cos}A \qquad \operatorname{Ctg}B=\frac{a}{b}=\operatorname{Tg}A$$

$$\operatorname{Cos}B=\frac{a}{c}=\operatorname{Sen}A \qquad \operatorname{Sec}B=\frac{c}{a}=\operatorname{Csc}A$$

$$\operatorname{Tg}B=\frac{b}{a}=\operatorname{Ctg}A \qquad \operatorname{Csc}B=\frac{c}{b}=\operatorname{Sec}A$$

RAZÒN	$\leftrightarrow$	**CO-RAZONES**
Seno	$\leftrightarrow$	**Co**seno
Tangente	$\leftrightarrow$	**Co**tangente
Secante	$\leftrightarrow$	**Co**secante

Propiedad (general)

"Si la razón trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la co-razón trigonométrica de otro ángulo agudo entonces los ángulos son complementarios (suman 90º), y recíprocamente si son complementarios entonces la razón trigonométrica de uno de ellos es igual a la co-razón trigonométrica del otro."

$$\boxed{\operatorname{Razón}(A)=\operatorname{CoRazón}(B) \iff A+B=90^{\circ}}$$

Propiedad (abreviada)

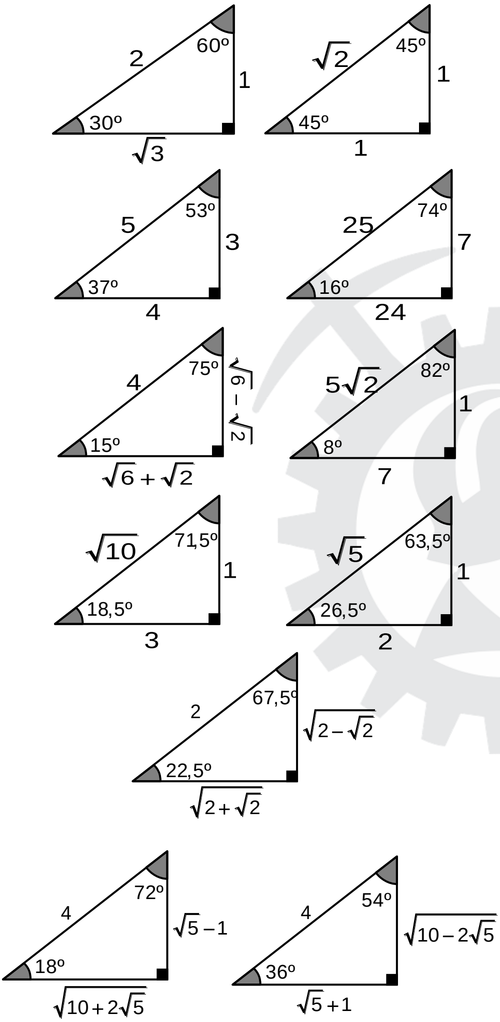
"La razón trigonométrica de un ángulo es igual a la co-razón trigonométrica de su ángulo complementario"

$$\boxed{\operatorname{Razón}(A)=\operatorname{CoRazón}(90^{\circ}-A)}$$

Teorema fundamental de las razones trigonométricas

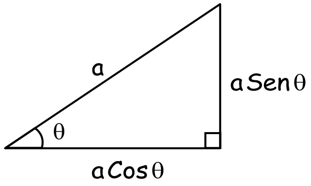
$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\operatorname{Cos}^2(\alpha)=1 \qquad \forall\alpha}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES 30º, 60º, 45º, 37º Y 53º

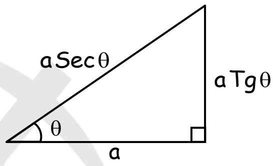


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

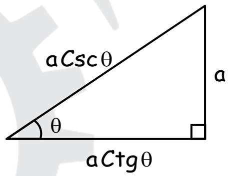
CASO I



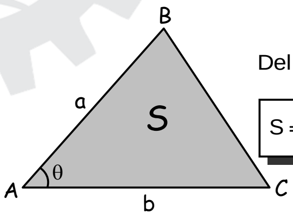
CASO II



CASO III



Área de una Región Triangular (S)



Del gráfico:

$$\boxed{S=\frac{a\cdot b}{2}\operatorname{Sen}\theta}$$